22202 Álgebra I – Ayudantía 01

Conjuntos y sus propiedades

Viernes 20 de Noviembre de 2020

3.1. Definiciones de Conjuntos

- a, b, c representarán ***objetos matemáticos*** (números, figuras geométricas, matrices, vectores,...). Con ello, $A = \{a, b, c\}$ será el ***conjunto*** que contiene a esos tres ***elementos*** a, b, c.
- Si consideramos al objeto a, vemos que $a \in A$: a ***pertenece a*** **(o está en) el conjunto** A.
- Con ese elemento a, podemos formar el conjunto $\{a\}$, que contiene un solo elemento (lo llamaremos ***singleton de*** a. Como $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$: **el singleton de** a ***es subconjunto de*** **(o está contenido en) el conjunto** A.
- Observar que ***los conjuntos, al ser objetos matemáticos, pueden formar parte de otros conjuntos más grandes***. Por ejemplo, si consideramos $B = \{\ \{a, b, c\}; \{a\}\ \}$, entonces $\{a\} \in B$ y $\{\{a\}\} \subseteq B$. Lo mismo ocurre con $A = \{a, b, c\}$, cumpliéndose que $A \in B$ y que $\{A\} \subseteq B$.
- Es necesario mencionar también que **existe un conjunto sin elementos**; lo simbolizamos por $\varnothing = \{\ \}$ y lo llamaremos ***conjunto vacío***.
- Finalmente, se debe mencionar que **podemos definir un conjunto de referencia**; es decir, un conjunto máximo dentro del cual trabajaremos en cada contexto. A este conjunto se le suele denominar ***conjunto universo*** y se le denota por U. Por ejemplo, si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, podemos decir que $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ es tal que $A \subseteq U$.

3.2. Operaciones de Conjuntos

En esta parte, se deben considerar siempre un conjunto universo U, además de los conjuntos $A, B \subseteq U$.

- **Contención:** $\forall x \in U\ [\ A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)\ ]$
- **Igualdad:** $\forall x \in U\ [\ A = B \iff (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\ ]$ o bien $\forall x \in U\ [\ A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)\ ]$
- **Complemento:** $\forall x \in U\ [\ x \in A^{\mathsf{C}} \iff x \notin A\ ]$
- **Unión:** $\forall x \in U\ [\ \in A \cup B \iff (x \in A\ \vee\ x \in B)\ ]$
- **Intersección:** $\forall x \in U\ [\ x \in A \cap B \iff (x \in A\ \wedge x \in B)\ ]$
- **Resta:** $\forall x \in U\ [\ x \in A - B \iff (x \in A \wedge x \notin B)\ ]$

  Para la resta, notar que $(x \in A\ \wedge x \notin B) \ \Leftrightarrow\ (x \in A\ \wedge x \in B^{\mathsf{C}})\ \Leftrightarrow\ x \in A \cap B^{\mathsf{C}}$.

  Por lo tanto, para el conjunto resta se tiene: $\boxed{A - B = A \cap B^{\mathsf{C}}}$

3.3. Ejercicios propuestos

1. Cuestione las siguientes afirmaciones:

   a. $\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$ b. $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ c. $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$

2. Sean los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$ y $D = \{2, 4, 8\}$. Determine los siguientes conjuntos:

   a. $A \cup B$
   b. $A \cap C$
   c. $(A \cup B) \cap C^c$
   d. $A - B$
   e. $C - D$
   f. $(B - D) \cup (D - B)$

3. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y sean $A, B, C \subseteq U$. Si se sabe que:

   - $A \cap B = \{2\}$
   - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   - $C \cap B = \{5\}$
   - $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

   Determine los conjuntos A, B, C.

4. Justificar las siguientes afirmaciones para A, B, C conjuntos:

   a. $A \subseteq A \cup B$
   b. $A \cap B \subseteq B$
   c. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
   d. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
   e. $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \ \Rightarrow A \subseteq C$
   f. $B \subseteq A \ \wedge \ C \subseteq A \ \Rightarrow (B \cup C) \subseteq A$
   g. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   h. $A - (B \cap A) \subseteq (A \cup C) - B$
   i. $(A^{\mathsf{C}} \cap B)^{\mathsf{C}} = A \cup B^{\mathsf{C}}$
   j. $A \cap (B \cup A)^{\mathsf{C}} = \varnothing$
   k. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   l. $(A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{C}}) = A$
   m. $(A \cup B) \cap (A \cup B^{\mathsf{C}}) = A$

5. Simplifique las siguientes expresiones de modo que los conjuntos A, B y C aparezcan a lo sumo una vez.

   a. $((A^{\mathsf{C}} \cup C^{\mathsf{C}}) \cap B)^{\mathsf{C}} \cup (A \cup (C \cap B)^{\mathsf{C}} \cup C)^{\mathsf{C}}$
   b. $(A \cup (B \cup C)^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} \cap (A^{\mathsf{C}} \cup (B \cap C)^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}}$

6. Dado A conjunto, presente dos demostraciones para $\varnothing \subseteq A$

7. Demostrar que si A, B son conjuntos, entonces:

$$B - (B - A) = A \iff A \subseteq B$$

8. Demostrar que si A, B, C son conjuntos tales que $A \cap C = \varnothing$, entonces:

$$A - B \subseteq B \cup C \implies A - B = \varnothing$$