22202 Álgebra I - Ayudantía 01

Conjuntos y sus propiedades

Viernes 20 de Noviembre de 2020

1. Cuestione las siguientes afirmaciones:

   a. $\{a,b,c,a\} = \{a,b,c\}$ b. $\{a\} \in \{a,\{a\}\}$ c. $\{a\} \subseteq \{a,\{a\}\}$

Solución: a. Los conjuntos mostrados poseen los mismos elementos, pues los elementos repetidos no son distintos. Luego, el conjunto {a,b,c,a} en realidad tiene solamente 3 elementos, a, b y c. Luego, {a,b,c,a} = {a,b,c}.

b. {a} es un **elemento** del conjunto { a,{a} }; luego, {a} está en el conjunto dado.

c. {a} es un **conjunto** que contiene al **elemento** a; luego, como a está en { a, {a} }, se concluye que {a} es subconjunto del conjunto dado.

2. Sean los conjuntos $U = \{1,2,3,4,\ldots,12\}$, $A = \{1,3,5,7,9,11\}$, $B = \{2,3,5,7,11\}$, $C = \{2,3,6,12\}$ y $D = \{2,4,8\}$. Determine los siguientes conjuntos:

   a. $A \cup B$ c. $(A \cup B) \cap C^c$ e. $C - D$

   b. $A \cap C$ d. $A - B$ f. $(B - D) \cup (D - B)$

Solución:

a. $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9,11\}$

b. $A \cap B = \{3,5,7,11\}$

c. Considerando $C^c = \{1,4,5,7,8,9,10,11\}$, se obtiene $(A \cup B) \cap C^c = \{1,5,7,9,11\}$

e. $C - D = \{3,6,12\}$

Considerando $D^c = \{1,3,5,6,7,9,10,11,12\}$, se obtiene $C \cap D^c = \{3,6,12\}$

4. Justificar las siguientes afirmaciones para A, B, C conjuntos:

a. $A \subseteq A \cup B$

b. $A \cap B \subseteq B$

c. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

d. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

e. $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \ \Rightarrow A \subseteq C$

f. $B \subseteq A \ \wedge \ C \subseteq A \ \Rightarrow (B \cup C) \subseteq A$

g. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

h. $A - (B \cap A) \subseteq (A \cup C) - B$

i. $(A^{\mathsf{C}} \cap B)^{\mathsf{C}} = A \cup B^{\mathsf{C}}$

j. $A \cap (B \cup A)^{\mathsf{C}} = \varnothing$

k. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

l. $(A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{C}}) = A$

m. $(A \cup B) \cap (A \cup B^{\mathsf{C}}) = A$

Demostración: (Ejercicio a.)

BORRADOR 1:

$$\begin{gathered} A \subseteq A \cup B \\ \Leftrightarrow \forall x \in U \, (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \\ \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \\ Verdadero, \, pues \, (p \Rightarrow p \vee q) \equiv V \end{gathered}$$

DEMOSTRACIÓN 1:

$$\begin{gathered} x \in A \\ \Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ \Rightarrow x \in A \cup B \end{gathered}$$

DEMOSTRACIÓN 2:

$$\begin{gathered} x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \\ \Leftrightarrow \sim(x \in A) \vee (x \in A \cup B) \\ \Leftrightarrow x \notin A \vee (x \in A \vee x \in B) \\ \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in A) \vee x \in B \\ \Leftrightarrow (V) \vee x \in B \\ \Leftrightarrow V \end{gathered}$$

Por lo tanto, $A \subseteq A \cup B$

(Ejercicio letra i.) $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$

BORRADOR: Esta forma NO ES CORRECTA COMO DEMOSTRACIÓN

$$
\begin{aligned}
&x \in (A^c \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A \cup B^c \\
\Leftrightarrow [\ &\sim (x \in A^c \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B^c\ ] \\
\Leftrightarrow &\sim (x \notin A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \notin B
\end{aligned}
$$

Demostración 1 (Igualdad directa):

P.D.: $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c \quad \Leftrightarrow \quad [x \in (A^c \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A \cup B^c]$

$$
\begin{aligned}
&x \in (A^c \cap B)^c \\
\Leftrightarrow &\sim (x \in A^c \wedge x \in B) \\
\Leftrightarrow &\sim (x \notin A \wedge x \in B) \\
\Leftrightarrow &\ x \in A \vee x \notin B \\
\Leftrightarrow &\ x \in A \vee x \in B^c \\
\Leftrightarrow &\ x \in A \cup B^c
\end{aligned}
$$

Demostración 2 (Doble contención):

P.D.:

$$
\begin{aligned}
(A^c \cap B)^c = A \cup B^c \quad &\Leftrightarrow \quad [(A^c \cap B)^c \subseteq A \cup B^c] \quad \wedge \quad [A \cup B^c \subseteq (A^c \cap B)^c] \\
&\Leftrightarrow \quad [x \in (A^c \cap B)^c \Rightarrow x \in A \cup B^c] \quad \wedge \quad [x \in A \cup B^c \Rightarrow x \in (A^c \cap B)^c]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(\Rightarrow)\ x \in (A^c \cap B)^c & (\Leftarrow)\ x \in A \cup B^c \\
\Rightarrow \sim (x \in A^c \wedge x \in B) & \Rightarrow x \in A \vee x \in B^c \\
\Rightarrow \sim (x \notin A \wedge x \in B) & \Rightarrow x \in A \vee x \notin B \\
\Rightarrow x \in A \vee x \notin B & \Rightarrow \sim (x \notin A \wedge x \in B) \\
\Rightarrow x \in A \vee x \in B^c & \Rightarrow \sim (x \in A^c \wedge x \in B) \\
\Rightarrow x \in A \cup B^c & \Rightarrow x \in (A^c \cap B)^c
\end{array}
$$

Demostración 3 (Propiedades de Conjunto): (NO ACONSEJABLE)

Complemento de la Intersección (De Morgan)

$$(A^c \cap B)^c = (A^c)^c \cup B^c = A \cup B^c$$

Por lo tanto, $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$