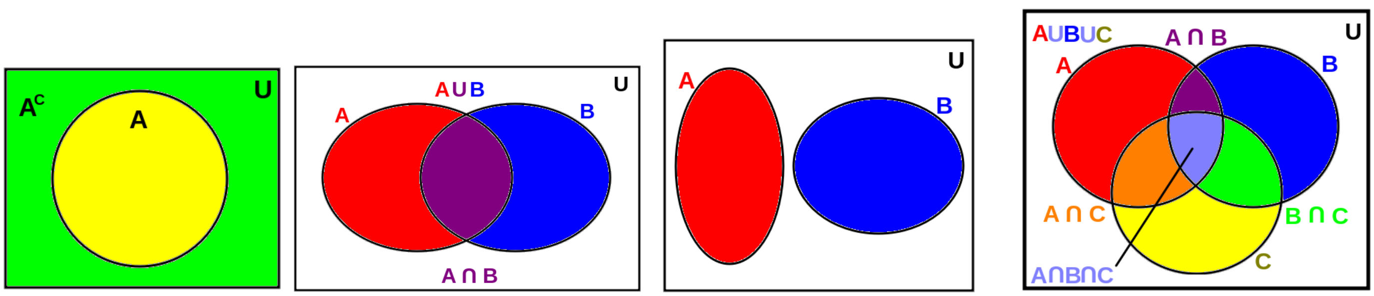
22202 Álgebra I – Ayudantía 04

Más sobre Conjuntos

Viernes 27 de Noviembre de 2020

4.1. Diagrama de Venn–Euler

- Es una representación que ***asocia los conjuntos con una región geométrica cerrada*** (habitualmente simbolizada por una curva cerrada, como una circunferencia o elipse). Es decir, el conjunto será todo lo que se halla **dentro de** esa región cerrada.
- Generalmente, estas regiones geométricas se hallan contenidas en una región rectangular, que simboliza el conjunto Universo (de referencia).
- Se utilizan con frecuencia como guía para entender lo que ocurre con los conjuntos involucrados en un problema de conteo o demostración. Sin embargo, en general estos diagramas **no se consideran una demostración en sí mismos**.



(a) Conjuntos A y A^C. (b) A y B no disjuntos. (c) A y B disjuntos. (d) A,B,C **no** disjuntos.

Figura 4.1: Algunos ejemplos de Diagramas de Venn. (Hechos en Paint)

4.2. Cardinalidad de un conjunto

- Sea A conjunto. Diremos que la ***cardinalidad de*** A será la cantidad de elementos que posee el conjunto, y se denota por $n(A) = \#A = |A| = \text{Card}(A)$.
- Notar que $n(\varnothing) = 0$. Además, distinguir que existen conjuntos con un número finito o infinito de elementos. En esta parte del Curso, nos centraremos en **conjuntos finitos** (es decir, su cardinalidad es un número natural o cero).
- **Propiedades:**
  1. $A = B \implies n(A) = n(B)$ **(al revés no es cierto)**
  2. $A \cap B = \varnothing \implies n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
  3. En general, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  4. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

4.3. Ejercicios propuestos

1. Se tienen tres conjuntos A, B, C tales que:

   - $n(A \cap B) = 3$
   - $n(A \cap C) = 3$
   - $n(B \cap C) = 4$
   - $n(A) = 8$
   - $n(B) = 12$
   - $n(C) = 10$
   - $n(A \cap B \cap C) = 1$

   Determine: a. $n(A \cup B \cup C)$ b. $n(A \cup B)$ c. $n(A \cup C)$

2. En una fiesta a la que asistieron 131 invitados, una persona que estaba aburrida observó que:

   - De los 79 que comieron pollo, 28 comieron solamente pollo.
   - De los 60 que comieron vacuno, 21 también comieron pescado.
   - De los 50 que comieron pescado, 12 comieron sólo pescado.
   - Hubo 9 invitados que comieron las tres cosas.

   Determine el número de personas que:

   a. Comieron pollo y vacuno.
   b. Comieron solo pollo y vacuno.
   c. Comieron solo vacuno.
   d. No comieron ninguna carne.
   e. Comieron una sola carne.
   f. Comieron solo dos carnes.

3. Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Demostrar que:

$$n(A \cup B \cup C) \; = \; n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

4. Se define la ***diferencia simétrica*** entre dos conjuntos A y B como el conjunto:

$$\boxed{A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)}$$

   Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
   b. $A \Delta A = \varnothing$
   c. $A \Delta \varnothing = A$
   d. $A \Delta B = B \Delta A$
   e. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
   f. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

5. Dados A, B conjuntos, demostrar que $A \subseteq B \implies A \Delta B = B - A$

6. Demostrar que $n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$