UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 02

Ejercicios Axiomas de Cuerpo

Semana del 01 de Junio de 2020

1. Demostrar que $-0 = 0$.

Solución: Como $0 \in \mathbb{R}$, entonces existe $-0 \in \mathbb{R}$ y $0 + (-0) = 0$ (por Axioma A3; es decir, (-0) es inverso aditivo del 0).

Por otra parte, de la Demostración ilustre 9 sabemos que $0 + 0 = 0$ (por Axioma A3; es decir, 0 también es inverso aditivo del 0).

Finalmente, por Unicidad del Inverso Aditivo, se concluye que $\boxed{-0 = 0}$ $\square$.

2. Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}\ [-(-a) = a]$.

Solución: Como $a \in \mathbb{R}$, entonces existe $-a \in \mathbb{R}$ y $a + (-a) = 0$ (por Axioma A3; es decir, $(-a)$ es inverso aditivo de a).

Como $-a \in \mathbb{R}$, entonces existe $-(-a) \in \mathbb{R}$ y $-(-a) + (-a) = 0$ (por Axioma A3; es decir, $-(-a)$ es inverso aditivo de $(-a)$).

Luego, se tiene:

$$\begin{aligned}
-(-a) &= -(-a) + 0 && /\text{(A2) Neutro aditivo}\\
&= -(-a) + [a + (-a)] && /\text{(A3) Inverso de } a\\
&= -(-a) + [(-a) + a] && /\text{(A4) Conmutatividad}\\
&= [-(-a) + (-a)] + a && /\text{(A1) Asociatividad}\\
&= 0 + a && /\text{(A3) Inverso de } -a\\
&= a && /\text{(A2) Neutro aditivo}\\
&\therefore,\ \boxed{\forall a \in \mathbb{R}\ [-(-a) = a]}\ \square.
\end{aligned}$$

4. Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}\ [a \cdot 0 = 0]$.

Solución:

$$\begin{aligned}
& a \cdot 0 = a(0 + 0) && /\text{(A2) Neutro aditivo}\\
\iff\ & \boxed{a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0} && /\text{(AM) Distributividad}
\end{aligned}$$

Como $x = a \cdot 0$ es solución de la ecuación $x + x = x$ y ya vimos anteriormente que esa ecuación tenía solución única $x = 0$, se concluye que $\boxed{a \cdot 0 = 0}$ $\square$.

5. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}\ [-(ab) = a(-b)]$.

Solución: Como $ab \in \mathbb{R}$, entonces existe $-(ab) \in \mathbb{R}$ y $ab + (-ab) = 0$ (por Axioma A3; es decir, $(-ab)$ es inverso aditivo de ab).

Ahora, queremos demostrar que $a(-b)$ también es inverso aditivo de ab:

$$\begin{aligned}
a(-b) + ab &= a(-b + b) && /\text{(AM) Distributividad}\\
&= a \cdot 0 && /\text{(A3) Inverso de } b\\
&= 0 && /\text{Ejercicio 4}
\end{aligned}$$

Finalmente, por Unicidad del Inverso Aditivo, se concluye que $\boxed{-(ab) = a(-b)}$ $\square$.

6. Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]$.

Solución:

$$\begin{aligned}
a(b-c) &= a[b+(-c)] && \text{/Definición de resta}\\
&= ab + a(-c) && \text{/(AM) Distributividad}\\
&= ab + (-ac) && \text{/Ejercicio 5}\\
&= ab - ac && \text{/Definición de resta}\\
&\therefore,\ \boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]}\ \ \square.
\end{aligned}$$

7. Demostrar que dados $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $(ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0)$.

Solución: En este caso, suponemos verdadero que $ab = 0$.

- Si $a = 0$, entonces $\quad ab = 0 \Longrightarrow 0 \cdot b = 0$ (verdadero por Ejercicio 4).
- Si $a \neq 0$, entonces existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $aa^{-1} = 1$. Con ello:

$$\begin{aligned}
ab = 0 &\Longleftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 && /\ \cdot a^{-1} \neq 0\\
&\Longleftrightarrow a^{-1}(ab) = 0 && /\ \text{Ejercicio 4}\\
&\Longleftrightarrow (a^{-1}a)b = 0 && /\ \text{(M1) Asociatividad}\\
&\Longleftrightarrow 1 \cdot b = 0 && /\ \text{(M3) Recíproco de } a\\
&\Longleftrightarrow b = 0 && /\ \text{(M2) Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

Notar que el caso $a = 0, b = 0$ está incluido en el primer caso (pues si $a = 0$ da lo mismo el valor de $b \in \mathbb{R}$). Por lo tanto, (como se trata de dos casos excluyentes) se concluye que $\boxed{ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0}$ $\square$.

8. Demostrar que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ [-(x+y) = (-x) + (-y)]$.

Solución: Como $(x+y) \in \mathbb{R}$, entonces existe $-(x+y) \in \mathbb{R}$ y $(x+y) + [-(x+y)] = 0$ (por Axioma A3; es decir, $-(x+y)$ es inverso aditivo de $(x+y)$).

Ahora, queremos demostrar que $(-x) + (-y)$ también es inverso aditivo de $(x+y)$:

$$\begin{aligned}
(x+y) + [(-x) + (-y)] &= (y+x) + (-x) + (-y) && /\text{(A4) Conmutatividad}\\
&= y + [x + (-x)] + (-y) && /\text{(A1) Asociatividad}\\
&= y + 0 + (-y) && /\ \text{(A3) Inverso de } x\\
&= y + (-y) && /\ \text{(A2) Neutro aditivo}\\
&= 0 && /\ \text{(A3) Inverso de } y
\end{aligned}$$

Finalmente, por Unicidad del Inverso Aditivo, se concluye que $\boxed{-(x+y) = (-x) + (-y)}$ $\square$.

15. Demostrar que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ [(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$**.**

Solución: La clave para esta demostración es usar la definición del cuadrado de un número; es decir: $\boxed{a^2 = a \cdot a}$. Por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) && \text{/Definición de cuadrado}\\
&= x(x+y) + y(x+y) && \text{/(AM) Distributividad}\\
&= x \cdot x + xy + yx + y \cdot y && \text{/(AM) Distributividad}\\
&= x^2 + xy + yx + y^2 && \text{/Definición de cuadrado}\\
&= x^2 + xy + xy + y^2 && \text{/(M4) Conmutatividad}\\
&= x^2 + 2xy + y^2 && /a + a = 2a \text{ (Demuéstrelo, es muy fácil).}\\
&\therefore,\ \boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}\ [(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]}\ \ \square.
\end{aligned}
$$

21. Demostrar que $\forall a, c \in \mathbb{R}\ \forall b, d \in \mathbb{R} - \{0\} \left[\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}\right]$**.**

Solución: La clave para esta demostración es usar la definición de división entre dos números; es decir: $\boxed{\dfrac{x}{y} = xy^{-1}}$. Por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= (ab^{-1}) + (cd^{-1}) && \text{/Definición de división}\\
&= (ab^{-1}) \cdot 1 + 1 \cdot (cd^{-1}) && \text{/(M2) Neutro multiplicativo}\\
&= (ab^{-1}) \cdot (dd^{-1}) + (bb^{-1} \cdot (cd^{-1}) && \text{/(M3) Inverso de } b \text{ y } d \text{ (¿por qué se puede?)}\\
&= a(b^{-1}d)d^{-1} + b(b^{-1}c)d^{-1}) && \text{/(M1) Asociatividad}\\
&= a(db^{-1})d^{-1} + b(cb^{-1})d^{-1}) && \text{/(M4) Conmutatividad}\\
&= ad(b^{-1}d^{-1}) + bc(b^{-1}d^{-1}) && \text{/(M1) Asociatividad}\\
&= (ad+bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{/(AM) Distributividad}\\
&= (ad+bc)(bd)^{-1} && \text{/Ejercicio 14}\\
&= \frac{ad+bc}{bd} && \text{/Definición de división}\\
&\therefore,\ \boxed{\forall a, c \in \mathbb{R}\ \forall b, d \in \mathbb{R} - \{0\} \left[\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}\right]}\ \ \square.
\end{aligned}
$$