UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 07

Ecuaciones Cúbicas y Cuárticas

Semana del 03 de Agosto de 2020

Todos estos ejercicios corresponden a la Guía subida por la profesora Gladys Bobadilla.

5.1. Ecuaciones de Tercer Grado: primeros métodos

1. (Recíprocas) Factorizar la siguiente ecuación según los coeficientes y resolver:

a. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$

b. $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$

Solución: **<u>Para a.</u>**

$$\begin{aligned}
2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0 &\iff 2(x^3+1) + 7x(x+1) = 0 \\
&\iff 2(x+1)(x^2 - x + 1) + 7x(x+1) = 0 \\
&\iff (x+1)[2(x^2 - x + 1) + 7x] = 0 \\
&\iff (x+1)[2x^2 - 2x + 2 + 7x] = 0 \\
&\iff (x+1)[2x^2 + 5x + 2] = 0
\end{aligned}$$

En este punto, la ecuación cuadrática se resuelve usando los métodos ya conocidos (notar que ***la ecuación cuadrática también es simétrica***):

$$\begin{aligned}
&\Delta = (5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 > 0 \quad \text{(dos soluciones reales)} \\
&\implies x = \frac{-5+\sqrt{9}}{2(2)} \quad \text{y} \quad x = \frac{-5-\sqrt{9}}{2(2)} \\
&\implies x = \frac{-5+3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-5-3}{4} \\
&\implies x = \frac{-1}{2} \quad \text{y} \quad x = -2
\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0 \iff (x+1)(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ y el conjunto solución, por tanto, será: $\boxed{S = \left\{-2, -1, \frac{-1}{2}\right\}}$ $\square$.

<u>Para b.</u> se deja como ejercicio.

2. (Ruffini o Completación) Resolver las siguientes ecuaciones considerando la raíz dada:

a. $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \quad (x = -1)$

b. $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0 \quad \left(x = \frac{1}{2}\right)$

Solución: **<u>Para a.</u>** Primero la resolveremos por completación:

$$\begin{aligned}
2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 &\iff 2x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\
&\iff [2x^3 + 2x^2] - 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\
&\iff [2(x+1)x^2] - 3x^2 - 3x - 2x - 2 = 0 \\
&\iff [2(x+1)x^2] - [3x^2 + 3x] - [2x + 2] = 0 \\
&\iff [2(x+1)x^2] - 3x[x+1] - 2[x+1] = 0 \\
&\iff (x+1)[2x^2 - 3x - 2] = 0
\end{aligned}$$

Ahora resolveremos mediante la división sintética (Método de Ruffini):

$2x^3$	$-x^2$	$-5x$	-2	$[x-(-1)]$
2	-1	-5	-2	-1
$-$	-2	3	2	
2	-3	-2	$\boxed{0}$	
$(2x^2$	$-3x$	$-2)$		$(x+1)$

En este punto, la ecuación cuadrática se resuelve usando los métodos ya conocidos (notar que ***la ecuación cuadrática no es simétrica en esta ocasión***):

$$\begin{aligned}
&\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0 \quad \text{(dos soluciones reales)} \\
&\implies x = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2(2)} \quad \text{y} \quad x = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2(2)} \\
&\implies x = \frac{3+5}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{3-5}{4} \\
&\implies x = 2 \quad \text{y} \quad x = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \iff (x+1)(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ y el conjunto solución, por tanto, será: $\boxed{S = \left\{-1, \frac{-1}{2}, 2\right\}}$ $\square$.

<u>Para b.</u> se deja como ejercicio.

3. (Raíces racionales) Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $x^3 - 6x + 4 = 0$

b. $x^3 + x^2 - 2 = 0$

Solución: **<u>Para a.</u>** Debemos en primer lugar usar el Teorema de las Raíces Racionales. Considerando $p_0 = 4$ y $p_3 = 1$, se obtiene el siguiente conjunto de posibles raíces: $R = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

Ahora resolveremos mediante la división sintética (Método de Ruffini):

1	0	-6	4	+1
$-$	1	1	-5	
1	1	-5	$\boxed{-1}$	$\times$

1	0	-6	4	-1
$-$	-1	1	5	
1	-1	-5	$\boxed{9}$	$\times$

1	0	-6	4	+2
$-$	2	4	-4	
1	2	-2	$\boxed{0}$	
$(x^2$	$+2x$	$-2)$		$(x-2)$

En este punto, la ecuación cuadrática se resuelve usando los métodos ya conocidos (notar que ***la***

ecuación cuadrática no es simétrica en esta ocasión):

$$\begin{aligned}
\Delta &= (2)^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12 > 0 \quad \text{(dos soluciones reales)}\\
&\Longrightarrow x = \frac{-2+\sqrt{12}}{2(1)} \quad \text{y} \quad x = \frac{-2-\sqrt{12}}{2(1)}\\
&\Longrightarrow x = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2}\\
&\Longrightarrow x = -1+\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x = -1-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene $x^3 - 6x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)\left(x-(-1+\sqrt{3})\right)\left(x-(-1-\sqrt{3})\right) = 0$ y el conjunto solución, por tanto, será: $\boxed{S = \left\{-1-\sqrt{3}, (-2), -1+\sqrt{3}\right\}}$ $\square$.

<u>Para b.</u> se deja como ejercicio.

5.2. Un poco más allá: Cardano−Tartaglia y Cuártica Recíproca

4. (Cardano−Tartaglia)

a. Verificar que el cambio de variable $y = x - \dfrac{a}{3}$ transforma la ecuación $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ en una de la forma $x^3 + px + q$, donde:

$$p = b - \frac{a^2}{3} \qquad \text{y} \qquad q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

b. Verificar que $x^3 + px + q = 0$ si $x = \sqrt[3]{\dfrac{-q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\dfrac{-q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$

c. Usar la Fórmula de Cardano−Tartaglia para encontrar una raíz de la ecuación $x^3 + 3x + 2 = 0$.

Solución: <u>Para a.</u>

$$\begin{aligned}
y^3 + ay^2 + by + c = 0 &\overset{y=x-\frac{a}{3}}{\Longleftrightarrow} \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 - \cancel{3}\frac{a}{\cancel{3}}x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 \cancel{-ax^2} + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} \cancel{+ax^2} - 2a\frac{a}{3}x + a\frac{a^2}{9} + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} - \frac{2a^2}{3}x + \frac{a^3}{9} + bx - \frac{ab}{3} + c = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 + x\left(b + \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3}\right) + \left(\frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c - \frac{a^3}{27}\right) = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 + x\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \left(\frac{3a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c - \frac{a^3}{27}\right) = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 + x\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0\\
&\Longleftrightarrow x^3 + px + q = 0 \quad \square.
\end{aligned}$$

Para b.

$$
\begin{aligned}
x^3 &= \left[\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right]^3 \\
&= \frac{-q}{2}+\cancel{\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\frac{-q}{2}-\cancel{\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+3\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right) \\
&+3\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)^2 \\
&= -q+3\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}+3\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2} \\
&= -q+3\sqrt[3]{\left(\cancel{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}}-\frac{p^3}{27}\right)\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}+3\sqrt[3]{\left(\cancel{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}}-\frac{p^3}{27}\right)\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)} \\
&= -q+3\sqrt[3]{\left(-\frac{p^3}{27}\right)\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}+3\sqrt[3]{\left(-\frac{p^3}{27}\right)\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)} \\
&= -q+3\frac{-p}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}+3\frac{-p}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)} \\
&= -q-p\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}-p\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}=x^3 \\
&= -q-p\left[\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right] \\
&= -q-px \\
\Longrightarrow x^3+px+q &= (-q-px)+px+q=0
\end{aligned}
$$

Para c. $x^3+3x+2 \implies p=3 \wedge q=2$

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\frac{-2}{2}+\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{3^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-2}{2}-\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{3^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{-1+\sqrt{1+1}}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{1+1}} \\
&= \boxed{\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{2}} = x} \quad \square .
\end{aligned}
$$

Notar que esta ecuación no posee soluciones racionales (si desea verificarlo, hágalo a modo de ejercicio).

5. (Cuártica Recíproca)

a. Verificar que $x = 0$ no es solución de la ecuación $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.

b. Verificar que $\left(6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0\right) \iff \left(6x^2 + 5x - 38 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2} = 0\right)$

c. Verificar que el cambio de variable $z = x - \dfrac{1}{x}$ transforma la ecuación $\left(6x^2 + 5x - 38 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2} = 0\right)$ en la ecuación $6z^2 + 5z - 50 = 0$.

d. Resuelva la ecuación <u>**para** x</u>.

Solución: <u>**Para a.**</u> Al evaluar en $x = 0$ se obtiene $6 = 0$, por lo que no es solución.

<u>**Para b.**</u> Como $x \neq 0$, es posible dividir ambos lados de la ecuación por $x^2 > 0$, lo cual verifica lo pedido.

<u>**Para c.**</u>

$$
\begin{aligned}
& 6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \\
\iff & \left(6x^2 + \frac{6}{x^2}\right) + \left(5x + \frac{5}{x}\right) - 38 = 0 \\
\iff & 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \\
\iff & 6\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \\
\iff & 6\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 12 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \\
\iff & 6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 50 = 0 \\
\iff & 6\,(z)^2 + 5\,(z) - 50 = 0
\end{aligned}
$$

<u>**Para d.**</u> La ecuación cuadrática se resuelve usando los métodos ya conocidos:

$$
\begin{aligned}
& \Delta = (5)^2 - 4(6)(-50) = 25 + 1200 = 1225 > 0 \quad \text{(dos soluciones reales para } z\text{)} \\
& \Longrightarrow z = \frac{-5 + \sqrt{1225}}{2(6)} \quad \text{y} \quad z = \frac{-5 - \sqrt{1225}}{2(6)} \\
& \Longrightarrow z = \frac{-5 + 35}{12} \quad \text{y} \quad z = \frac{-5 - 35}{12} \\
& \Longrightarrow z = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad z = \frac{-10}{3} \\
& \Longrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{-10}{3} \\
& \Longrightarrow x^2 + 1 = \frac{5}{2}x \quad \text{y} \quad x^2 + 1 = \frac{-10}{3}x \\
& \Longrightarrow \boxed{x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0}
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones obtenidas recién deben ser resueltas por separado, obteniéndose con ello las cuatro soluciones buscadas (no necesariamente todas reales).

$$\Delta = (-5/2)^2 - 4(1)(1) = (25/4) - 4 = (9/4) > 0 \quad \text{(dos soluciones reales)}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{(5/2) + \sqrt{9/4}}{2(1)} \quad \text{y} \quad x = \frac{(5/2) - \sqrt{9/4}}{2(1)}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{(5/2) + (3/2)}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{(5/2) - (3/2)}{2}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = (10/3)^2 - 4(1)(1) = (100/9) - 4 = (64/9) > 0 \quad \text{(dos soluciones reales)}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{-(10/3) + \sqrt{64/9}}{2(1)} \quad \text{y} \quad x = \frac{-(10/3) - \sqrt{64/9}}{2(1)}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{-(10/3) + (8/3)}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-(10/3) - (8/3)}{2}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{-1}{3} \quad \text{y} \quad x = -3$$

El conjunto solución de la ecuación $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6 = 0$ será, por tanto: $\boxed{S = \left\{-3, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}}$ $\square$

.