UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 10

Axioma del Supremo

Semana del 07 de Septiembre de 2020

10.1. Herramientas a utilizar

***Definición 1*: Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que $u \in \mathbb{R}$ es cota superior de S si y sólo si $\forall s \in S\ (s \leqslant u)$.**
Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que $w \in \mathbb{R}$ es cota inferior de S si y sólo si $\forall s \in S\ (s \geqslant w)$.

***Definición 2*:**
Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que S es acotado superiormente si y sólo si $\exists u \in \mathbb{R} :\ (u$ cota superior de $S)$.
Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que S es acotado inferiormente si y sólo si $\exists w \in \mathbb{R} :\ (w$ cota inferior de $S)$.
Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que S es acotado si y sólo si S es acotado superiormente y S es acotado inferiormente.

***Definición 3*: Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que:**

- **u es supremo de S si y sólo si u es la menor de las cotas superiores de S.**
- **w es ínfimo de S si y sólo si w es la mayor de las cotas inferiores de S.**

***Teorema 1:* Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que u es supremo de S si y sólo si:**

a. **u es cota superior de S.**

b. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S) : (u - \varepsilon < x)$

***Teorema 2:* Dado $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que w es ínfimo de S si y sólo si:**

a. **w es cota inferior de S.**

b. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S) : (x < w + \varepsilon)$

***Teorema 3*: Si $S \subseteq \mathbb{R}$ posee supremo, entonces éste es único.**

***Axioma del Supremo*: Si $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \varnothing$ es acotado superiormente, entonces posee supremo.**

10.2. Ejemplos de aplicación

1. Dado el conjunto $S_1 = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, demostrar que $\sup(S_1) = 1$ y que $\inf(S_1) = 0$.

Solución: Esta demostración consta de dos partes, pues debemos demostrar:

(1) $\sup(S_1) = 1$

(2) $\inf(S_1) = 0$

Para (1): Vemos que $(\forall x \in S_1) : (x \leqslant 1)$; luego, 1 es cota superior de S_1.

Ahora, por contradicción, supondremos que $u \in \mathbb{R}$ es otra cota superior de S_1 que **pretende ser el supremo de** S_1. Entonces, se debe cumplir que $(\forall x \in S_1) : (x \leqslant u)$ (para ser cota superior) y que $u < 1$ (para ser un mejor candidato a supremo que 1).

En particular, consideremos a $x = 1 \in S_1$. Como $u < 1$, entonces se contradice que $(\forall x \in S_1) : (x \leqslant u)$. Luego, u no puede ser supremo de S_1 y, por lo tanto, $\sup(S_1) = 1$.

La demostración **para (2)** es análoga $\square$.

2. Dado el conjunto $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < 1\}$**, demostrar que** $\sup(S_1) = 1$ y que $\inf(S_1) = 0$.

Solución: Esta demostración consta de dos partes, pues debemos demostrar:

(1) $\sup(S_1) = 1$ (2) $\inf(S_1) = 0$

Para (1): Vemos que $(\forall x \in S_1) : (x < 1)$, lo que nos lleva a que $(\forall x \in S_1) : (x \leqslant 1)$. luego, 1 es cota superior de S_1.

Dado $\varepsilon > 0$, por contradicción, supondremos que $u = 1 - \varepsilon \in \mathbb{R}$ es otra cota superior de S_1 que **pretende ser el supremo de** S_1. Entonces, se debe cumplir que $(\forall x \in S_1) : (x \leqslant u)$ (para ser cota superior) y que $u < 1$ (para ser un mejor candidato a supremo que 1).

Consideremos a $x = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \in S_1$. Como $\dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, entonces $-\varepsilon < -\dfrac{\varepsilon}{2}$ de lo que sigue que $1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ y se obtiene $u < x$. Luego, se contradice que $(\forall x \in S_1) : (x \leqslant u)$. Luego, u no puede ser supremo de S_1 y, por lo tanto, $\sup(S_1) = 1$.

La demostración **para (2)** es análoga $\square$.

3. Determinar supremo e ínfimo para $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 8\}$.
Solución: Desarrollando la desigualdad y, con un poco de astucia, se tiene:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x < 8 &\iff x^2 - 2x - 8 < 0 \\
&\iff (x+2)(x-4) < 0 \qquad \text{(solo uno de los casos es válido)} \\
&\iff x + 2 > 0 \wedge x - 4 < 0 \\
&\iff x > -2 \wedge x < 4 \\
&\iff -2 < x < 4
\end{aligned}$$

Luego, $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 4\}$. Los candidatos a supremo e ínfimo serán, respectivamente, 4 y -2. Procediendo de manera análoga al **Ejemplo 2**, se demuestra que realmente ellos son el supremo y el ínfimo de S_3.

4. Determinar supremo e ínfimo para $S_4 = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 + x < \dfrac{1}{1-x}\right\}$.
Solución: En primer lugar, debemos restringir que $1 - x \neq 0$, por lo que $1 \neq x$. Luego, por Axioma O3 (Tricotomía) se tienen dos casos:

(1) Si $x > 1$, entonces $1 + x > 2$ y $-x < -1 \implies 1 - x < 0$. Luego, siempre ocurrirá que $1 + x > \dfrac{1}{1-x}$, por lo que $X_{(1)} = \varnothing$.

(2) Si $x < 1$, entonces $1 - x > 0$. Luego, se tiene:

$$\begin{aligned}
1 + x < \frac{1}{1-x} &\implies 0 < \frac{1}{1-x} - (1+x) \\
&\implies 0 < \frac{1 - (1+x)(1-x)}{1-x} \\
&\implies 0 < \frac{1 - (1 - x^2)}{1-x} \\
&\implies 0 < \frac{x^2}{1-x} \\
&\implies 0 < x^2
\end{aligned}$$

Con ello, $X_{(2)} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge x^2 > 0\}$. Esto equivale a $X_{(2)} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge x \neq 0\}$ y, con ello, $X_{(2)} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \wedge 0 < x < 1\}$.

Ahora resta demostrar que $\sup(S_4) = 1$ y que no existe $\inf(S_4)$. Demostraremos solamente lo segundo.

Por contradicción, suponer que existe $w = \inf(S_4)$. Para no perder más esfuerzo, supondremos que $w < 0$. Entonces se debiera cumplir que w es cota inferior de S_4, o sea, que $(\forall x \in S_4) : (w \leqslant x)$. Pero rápidamente vemos que $x = w - 1$ pertenece a S_4, pues $w < 0 \;\Rightarrow\; w - 1 < -1 < 0 \;\Rightarrow\; w - 1 < 0$ y, además, $w - 1 < w$. Por lo tanto, w no es cota inferior y, por lo tanto, no puede ser ínfimo. $\square$.

5. Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos no vacíos y acotados superiormente, entonces $\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$

Solución: Como los conjuntos A y B son no vacíos y acotados superiormente, por Axioma del Supremo existe $\sup(A)$ y $\sup(B)$.

Ahora, consideramos el conjunto $A \cap B$. Para este conjunto se tiene:

$$A \cap B \subseteq A \Longrightarrow (x \in A \cap B \Rightarrow x \in A)$$
$$A \cap B \subseteq B \Longrightarrow (x \in A \cap B \Rightarrow x \in B)$$

$$\begin{aligned}\sup(A) \text{ es cota superior de } A &\Longrightarrow (\forall x \in A) : (x \leqslant \sup(A)\ ) \\ &\Longrightarrow (\ \sup(A \cap B) \leqslant \sup(A)\ )\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup(B) \text{ es cota superior de } B &\Longrightarrow (\forall x \in B) : (x \leqslant \sup(B)\ ) \\ &\Longrightarrow (\ \sup(A \cap B) \leqslant \sup(B)\ )\end{aligned}$$

Luego, al ser menor o igual que ambos, en particular es menor o igual que el más pequeño de ambos. Por lo tanto, $\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$ $\square$.

6. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \varnothing$ y A, B acotados. Sea $c \in \mathbb{R}$.

a. Si $A + B = \{x + y, x \in A \wedge y \in B\}$, demuestre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

b. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ y $A \cdot B = \{xy, x \in A \wedge y \in B\}$, demuestre que $\sup A \cdot B = \sup A \sup B$.

c. Si $c > 0$ y $cA = \{cx, x \in A\}$, demuestre que $\sup cA = c \sup A$.

Solución: Demostraremos solamente (a.), quedando (b.) y (c.) como ejercicios.

Como A y B son no vacíos y acotados superiormente, entonces existe $\sup(A)$ y $\sup(B)$. Ahora, lo que debemos demostrar es que el número real definido por $(\sup(A) + \sup(B))$ es el supremo del conjunto $A + B$.

Sabemos que $\sup(A)$ es en particular cota superior de A, por lo que $(\forall x \in A) : (\ x \leqslant \sup(A)\ )$. También sabemos que $\sup(B)$ es en particular cota superior de B, por lo que $(\forall y \in B) : (\ y \leqslant \sup(B)\ )$. Luego, $(\forall x \in A)(\forall y \in B) : (\ x + y \leqslant \sup(A) + \sup(B)\ )$; es decir, $(\forall x + y \in A + B) : (\ x + y \leqslant \sup(A) + \sup(B)\ )$.

Por lo tanto, $\sup(A) + \sup(B)$ **es cota superior de** $A + B$.

Ahora, también se sabe que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) : (\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < x)$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in B) : (\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < y)$$

$$\Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists x + y \in A + B) : (\ (\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}) + (\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}) < x + y\ )$$
$$\Longrightarrow \boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists x + y \in A + B) : (\ (\sup(A) + \sup(B)) - \varepsilon) < x + y\ )}$$

De ambas conclusiones, se obtiene que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ $\square$.

10.3. Ejercicios

1. Determinar si los siguientes conjuntos de números reales son acotados superiormente. Cuando exista, determine el supremo y/o el ínfimo del conjunto:

a. $\mathbb{N}-]5,+\infty[$

b. $\{x \in \mathbb{R} : x > 1 \vee x = -1\}$

c. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\}$

d. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^+$ **un conjunto acotado. Sean** $sup(A) = M \neq 0$ **e** $inf(A) = m \neq 0$ **y** $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \in A\}$**. Demostrar que** $sup(B) = \frac{1}{m}$ **e** $inf(B) = \frac{1}{M}$.

3. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \varnothing$ **y** A, B **acotados. Sea** $c \in \mathbb{R}$**.**

a. Si $A + B = \{x + y, x \in A \wedge y \in B\}$**, demuestre que** $\text{ínf}\,(A + B) = \text{ínf}\,(A) + \text{ínf}\,(B)$.

b. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ **y** $A \cdot B = \{xy, x \in A \wedge y \in B\}$**, demuestre que** $\sup A \cdot B = \sup A \sup B$.

c. Si $c > 0$ **y** $cA = \{cx, x \in A\}$**, demuestre que** $\sup cA = c \sup A$.

d. Si $c > 0$ **y** $cA = \{cx, x \in A\}$**, demuestre que** $\text{ínf}\, cA = c\,\text{ínf}\, A$.

e. Si $c < 0$ **y** $cA = \{cx, x \in A\}$**, demuestre que** $\sup cA = c\,\text{ínf}\, A$.

f. Si $c < 0$ **y** $cA = \{cx, x \in A\}$**, demuestre que** $\text{ínf}\, cA = c \sup A$.

4. Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{R}$ **y** $B \subseteq \mathbb{R}$ **son conjuntos no vacíos y ACOTADOS, entonces:**

$$\sup(A \cup B) \leqslant \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ **acotado y sea** $S_0 \subseteq S$ **no vacío. Demostrar que** $\text{ínf}\, S \leqslant \text{ínf}\, S_0 \leqslant \sup S_0 \leqslant \sup S$.