Determinar una ecuación **cuadrática** si sus raíces suman -3/4 y su producto es 3/5.

Sol: Primer Método:

Sean p y q raíces de la ecuación cuadrática. Del enunciado se tiene:

$p+q = -3/4 \quad ==> \quad p = -3/4 - q$ (*)
$pq = 3/5$

$==> (-3/4 - q)\, q = 3/5$
$<==> -(3/4)q - q^2 = 3/5$
$<==> -q^2 - (3/4)q - 3/5 = 0 \qquad / + q^2 + (3/4)q + (3/5)$
$<==> 0 = q^2 + (¾)q + 3/5$

$Disc = 9/16 - 12/5 < 0$

Segundo Método:

De los Teoremas vistos, se sabe que para una ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$ (A!=0) , se tiene:

$p+q = -B/A = -3/4 \quad ==> B/A = ¾ \quad ==> \quad B = 3A/4$, A real no nulo.
$pq = C/A = 3/5 \quad ==> C = 3A/5$, A real no nulo.

Para cada valor de A se obtendrá una ecuación que satisface las condiciones pedidas.
Por ejemplo, para A=1, se obtiene $x^2 + (3/4)x + 3/5 = 0$ (Misma del Primer Método).
En cambio. A=-2, se obtiene $-2x^2 - (3/2)x - 6/5 = 0$

LA CONTRADICCIÓN:

$Disc = 9/16 - 12/5 = 45/80 - 192/80 = -147/80$

$x= (-(3/4) \pm sqrt(-147/80)) / 2$

$x= -⅜ \pm (1/2)sqrt(147/80)\, i$

$x1 = -⅜ + (1/2)sqrt(147/80)\, i \qquad x2 = -⅜ - (1/2)sqrt(147/80)\, i$

$x1+x2 = -⅜ + \% + -⅜ - \% = -¾$

$x1x2 = (3/8)^2 - (3/8)(1/2)sqrt(147/80)\, i + (3/8)(1/2)sqrt(147/80)\, i - (1/2)^2 (147/80)\, i^2$

$x1x2 = (3/8)^2 + (¼)(147/80) = 9/64 + 147/320 = (45+147) / 320 = 192 / 320 = 96/ 160 = 48/80 = 24/40 = 12/20 = 3/5$

19) $a^3 + b^3 <= a^2b + ab^2$

Dem: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \qquad / a^2 + b^2 >= 2ab$
$>= (a+b)(2ab - ab) = (a+b)(ab) = a^2b + ab^2$
Por lo tanto, $a^3 + b^3 >= a^2b + ab^2$

Ejercicios de Axiomas de Cuerpo

1) xz = yz ^ z!= 0 ==> x = y

Dem: Como z!=0, por Axioma M3 (Inverso Multiplicativo) existe z^-1 != 0. Luego,

xz = yz / M3 Inverso Multiplicativo
<==> (xz) z^-1 = (yz) z^-1 / M1 Asociatividad
<==> x(zz^-1) = y (zz^-1) / M3 Recíproco (Inverso Multiplicativo)
<==> x * 1 = y * 1 / M2 Elemento Identidad (Neutro Multiplicativo)
<==> x = y

7) x>0 ^ y>0 ==> x+y >= 2sqrt(xy)

Borrador: x+y >= 2sqrt(xy)
<==> x – 2sqrt(xy) + y >= 0
<==> (sqrt(x) – sqrt(y))² >= 0
Cierto, pues TODO número al cuadrado es no negativo.

Dem: Como x e y son positivos, sus raíces existen.
Luego, el número (sqrt(x) – sqrt(y))² es real y además es no negativo (por ser cuadrado).

Entonces: (sqrt(x) – sqrt(y)² >= 0
<==> (sqrt(x))² – 2sqrt(x) sqrt(y) + (sqrt(y))² >= 0
<==> x – 2sqrt(xy) + y >= 0 / + 2sqrt(xy)
<==> x + y >= 2sqrt(xy)