UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

APUNTES DE MATEMÁTICA BÁSICA

Gladys Bobadilla A. y Jorge Billeke G.

Santiago de Chile
1996

Contenidos

Capítulo 1

Los números reales

1.1 Introducción

Para llegar al concepto actual de número real han debido transcurrir varios siglos de pensamiento. Una construcción satisfactoria de ellos, desde el punto de vista lógico, sólo se logró después de la segunda mitad del siglo XIX. Puede parecer paradójico que una teoría tan básica en matemática haya costado tanto trabajo dejarla presentable. Desde los inicios de la matemática como ciencia, en los siglos VI y V a.C. en Grecia, se evidenciaron las profundas dificultades inherentes a la idea de representar abstractamente una magnitud que varía continuamente, como puede apreciarse en hechos como el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y las paradojas de Zenón. Aunque los mismos griegos lograron superar parte de las dificultades, hubo una que no superaron y fue el no considerar como número ciertas relaciones entre números, como los cuocientes o las proporciones.

En cambio, hubo otros pueblos -los orientales en general- que al parecer no tuvieron problemas, tal vez porque no cargaban con una lógica tan rigurosa, en concebir los números como cuocientes de magnitudes, lo que les permitió avanzar en aritmética y álgebra.

Al llegar al siglo XVII, Newton en su Aritmética General, escribió: *por número real entendemos no tanto una colección de unidades como un cuociente abstracto de una cierta magnitud a otra tomada como unidad.* Este número (cuociente) puede ser entero, racional o, si la magnitud dada es inconmensurable con la unidad, irracional.

Así, pues, un número real en su sentido original no es otra cosa que el cuociente de una magnitud a otra tomada como unidad; en casos particulares es un cuociente de longitudes, de áreas, de pesos, etc. Por tanto, un número real es, en general, un cuociente de magnitudes en las cuales se ha hecho abstracción de su naturaleza concreta y el sistema de los números reales es la imagen abstracta de todos los valores posibles de una magnitud que varía continuamente.

Para demostrar cómo el concepto general de número real puede servir como base de una teoría matemática, es preciso dar su definición matemática de un modo formal, lo que constituye el objetivo de este primer capítulo. Para tener una visión histórica de la evolución del concepto de número, se recomienda el artículo *Visión General de la Matemática* que aparece en el volumen 1 del libro de A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y otros La matemática: su contenido, métodos y significado , Alianza Editorial, 1976.

Para los propósitos de estos apuntes se eligió la forma axiomática, que tiene la ventaja de presentar rápidamente las propiedades de los números reales, aunque deja en las sombras su desarrollo histórico.

1.2 La aritmética de los números reales: axiomas de cuerpo

Aceptaremos la existencia de un conjunto no vacío $\mathbb{R}$, que llamaremos conjunto de los **números reales**. Sobre él se ha definido una relación de igualdad y dos operaciones algebraicas . La relación de igualdad "=" satisface las propiedades de:

(I_1) **Reflexividad**: $a = a$

(I_2) **Simetría**: si $a = b$, entonces $b = a$

(I_3) **Transitividad**: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Las dos operaciones definidas sobre $\mathbb{R}$ son la **suma** $(+)$ y la **multiplicación** $(\cdot)$.

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \\ \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

Estas operaciones satisfacen las reglas siguientes, llamadas **Axiomas de Cuerpo**.

(C_1) Ley **asociativa** para la suma: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(C_2) Existencia de un **elemento identidad** para la suma: $a + 0 = 0 + a = a$

(C_3) Existencia de **inversos** para la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(C_4) Ley **conmutativa** para la suma: $a + b = b + a$.

(C_5) Ley **asociativa** para la multiplicación: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(C_6) Existencia de un **elemento identidad** para la multiplicación: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; $1 \neq 0$.

(C_7) Existencia de **inversos** para la multiplicación: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, para $a \neq 0$.

(C_8) Ley **conmutativa** para la multiplicación: $a \cdot b = b \cdot a$

(C_9) Ley **distributiva**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Estas operaciones son **compatibles con la relación de igualdad**, es decir, si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ y $a \cdot c = b \cdot c$.

A partir de estos axiomas y las reglas de la lógica formal se pueden obtener todas las otras propiedades de la aritmética usual como lo demostraremos a continuación.

Teorema 1.2.1 En $\mathbb{R}$ existe un único elemento neutro para la suma y para la multiplicación.

Demostración: Usando el Método de Reducción al Absurdo, supondremos que existe otro elemento neutro para la suma, 0^*, distinto de 0. Entonces, en particular, aplicando dos veces el axioma C_2, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 0^* + 0 & = & 0 \\ 0 + 0^* & = & 0^*, \end{array}$$

por axiomas (C_4) e (I_3), se tiene $0 = 0^*$, lo que contradice la suposición que 0 es distinto de 0^*. Esta contradicción proviene de suponer la existencia de otro elemento neutro, por tanto podemos concluir la unicidad del elemento neutro para la suma.
Similarmente podemos suponer la existencia de un elemento neutro para la multiplicación distinto de 1, denotémoslo por 1^*. Entonces, aplicando dos veces el axioma (C_6), tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 1^* \cdot 1 & = & 1 \\ 1 \cdot 1^* & = & 1^*. \end{array}$$

Así por axioma (C_8) e (I_3), se tiene $1 = 1^*$, lo que contradice la suposición inicial que $1 \neq 1^*$, por tanto podemos concluir la unicidad del elemento neutro para la multiplicación. ■

Teorema 1.2.2 En $\mathbb{R}$ existe un único elemento inverso para la suma y para la multiplicación.

Demostración: Dado $a \in \mathbb{R}$, supongamos que $-a$ y a' son dos elementos inversos distintos para la suma. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} a + (-a) & = & 0 \\ a + a' & = & 0. \end{array}$$

Por transitividad de la igualdad:

$$a + (-a) = a + a' \iff [(-a) + a] + (-a) = [(-a) + a] + a'.$$

Por lo cual $0 + (-a) = 0 + a'$ y así $-a = a'$.
Lo que contradice la suposición que $-a \neq a'$. Por tanto,$(-a)$ es único.
De forma análoga se demuestra la unicidad del elemento inverso para la multiplicación, lo que se deja como ejercicio. ■
Comentario:

1. Por la unicidad del inverso aditivo $a + b = 0$ implica $a = -b$ y $b = -a$
2. Por la unicidad del inverso multiplicativo $ab = 1$ implica $a = b^{-1}$ y $b = a^{-1}$

Teorema 1.2.3 (i) El cero es el inverso aditivo de sí mismo, es decir, $-0 = 0$.

(ii) El 1 es el inverso multiplicativo de sí mismo, es decir, $1^{-1} = 1$.

Demostración:

(i) De la unicidad del elemento inverso aditivo, aplicado para $a = 0$, se deduce que $0 + 0 = 0$, lo que implica que $-0 = 0$.

(ii) De la unicidad del elemento inverso multiplicativo, aplicado para $a = 1$, se deduce que $1 \cdot 1$ lo que implica que $1^{-1} = 1$ ■

Teorema 1.2.4 Para todo $a \in \mathbb{R}$; $0 \cdot a = 0$

Demostración: Usando axioma (C_2), se tiene que $0 = 0 + 0$, por tanto

$$\begin{array}{rcll} 0 \cdot a & = & (0 + 0) \cdot a & \\ 0 \cdot a & = & 0 \cdot a + 0 \cdot a & \text{por axioma } (C_9). \\ 0 \cdot a + (-0 \cdot a) & = & 0 \cdot a + (0 \cdot a) + (-0 \cdot a) & \\ 0 & = & a \cdot 0 + (0 \cdot a + (-0 \cdot a)) & \text{por axioma } (C_3). \\ 0 & = & a \cdot 0 & \text{por axioma } (C_3). \end{array}$$

Lo que implica por axioma (C_8) que $0 = 0 \cdot a$ ■
Observe que, en particular, el teorema anterior asegura que $0 \cdot 0 = 0$ y que $1 \cdot 0 = 0$.

Teorema 1.2.5 Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:

(i) $-(-a) = a$.

(ii) $(-a) \cdot b = -(ab)$.

(iii) $a \cdot (-b) = -(ab)$.

(iv) $(-a)(-b) = ab$.

Demostración: Lo fundamental para demostrar este conjunto de propiedades es leer bien las expresiones. $-(-a)$ debe ser leída como *inverso de* $(-a)$. Así (i) se lee en palabras: el inverso de $(-a)$ es a. Como el inverso aditivo es único, basta demostrar que $(-a)+a=0$, lo que es inmediato del axioma (C_3).
Para (ii) y (iii) se usa la misma idea, es decir, si $(-a)b$ es el inverso aditivo de ab debe satisfacerse la propiedad $ab+(-a)b=0$. Veamos que efectivamente es así:

$$\begin{aligned} ab+(-a)\cdot b &= (a+(-a))b && \text{por axioma } (\mathrm{C}_9). \\ &= 0\cdot b && \text{por axioma } (\mathrm{C}_3). \\ &= 0 && \text{por teorema 1.2.3} \end{aligned}$$

De la misma forma se demuestra (iii). Finalmente, para demostrar (iv) observemos que usando (ii)

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(a(-b)) && \\ &= -(-(ab)) && \text{por (iii)} \\ &= ab && \text{por (i)} \end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.6 Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$, se tienen las siguientes propiedades:

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ii) $a^{-1} \cdot b = (a \cdot b^{-1})^{-1}$.

(iii) $a \cdot b^{-1} = (a^{-1} \cdot b)^{-1}$.

(iv) $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$.

Demostración: Como se puede observar a simple vista este teorema es la versión multiplicativa del teorema 1.2.5. Las ideas de fondo son análogas.
Para demostrar (i), lo que se debe cumplir es que el inverso multiplicativo de a^{-1} es a. Para ello, estudiemos qué sucede al multiplicar a^{-1} por a, $a^{-1} \cdot a = 1$; por axioma(C_7). Pero esto también dice que $(a^{-1})^{-1} = a$, ya que los inversos multiplicativos son únicos, por teorema 1.2.1.
Para (ii) y (iii):

$$\begin{aligned} (ab^{-1})\cdot(a^{-1}b) &= (ab^{-1})\cdot(ba^{-1}) && \text{por axioma } (\mathrm{C}_8.) \\ &= (ab^{-1}b)a^{-1} && \text{por axioma } (\mathrm{C}_5). \\ &= (a\cdot 1)a^{-1} && \text{por axioma } (\mathrm{C}_7). \\ &= a\cdot a^{-1} && \text{por axioma } (\mathrm{C}_6). \\ &= 1 && \text{por axioma } (\mathrm{C}_7), \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $(ab^{-1})^{-1} = a^{-1}b = ba^{-1}$.
(iv) Se obtiene del uso consecutivo de las propiedades recién demostradas:

$$\begin{aligned} a^{-1}b^{-1} &= (a(b^{-1})^{-1})^{-1} && \text{por (ii)} \\ &= (ab)^{-1} && \text{por (i)} \end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.7 Leyes de cancelación.

(i) $a + b = a + c \iff b = c.$

(ii) $ab = ac\ ,\ a \neq 0 \iff b = c.$

Demostración: (i) Si $a + b = a + c$, entonces por compatibilidad de la igualdad con la suma,

$$\begin{array}{lcll} (-a) + (a + b) & = & (-a) + (a + c) & \\ ((-a) + a) + b) & = & ((-a) + a) + c & \text{por axioma } (\mathrm{C}_4) \\ 0 + b & = & 0 + c & \text{por axioma } (\mathrm{C}_2). \\ b & = & c. & \end{array}$$

El recíproco es expresión de la propiedad de la compatibilidad con la suma. (ii) se deja de ejercicio. ■

Teorema 1.2.8 $ab = 0 \iff (a = 0) \vee (b = 0).$

Demostración: Sea $ab = 0$, si además $a \neq 0$, entonces existe a^{-1} y por compatibilidad de la igualdad con la multiplicación,

$$\begin{array}{lcll} a^{-1}(ab) & = & a^{-1} \cdot 0 & \\ (a^{-1}a)b & = & 0 & \text{axioma } (\mathrm{C}_5)\text{, teorema 1.2.3} \\ 1 \cdot b & = & 0 & \text{axioma } (\mathrm{C}_7). \\ b & = & 0 & \text{axioma } (\mathrm{C}_6). \end{array}$$

Si suponemos $b \neq 0$ se obtiene de la misma forma $a = 0$.
El recíproco corresponde al teorema 1.2.4. ■

Teorema 1.2.9 (i) La ecuación $a + x = b$ tiene una única solución $x = b + (-a)$

(ii) Si $a \neq 0$, entonces la ecuación $a \cdot x = b$ tiene una única solución $x = a^{-1}b$.

Demostración: i) Dada la expresión $a + x = b$, se tiene

$$\begin{array}{lcll} (-a) + (a + x) & = & (-a) + b & \\ ((-a) + a) + x & = & b + (-a) & \text{por axioma } (\mathrm{C}_1),(\mathrm{C}_4) \\ 0 + x & = & b + (-a) & \text{por axioma } (\mathrm{C}_3) \\ x & = & b + (-a) & \text{por axioma } (\mathrm{C}_2). \end{array}$$

La unicidad se demuestra como siempre por reducción al absurdo, como lo hemos hecho en los teoremas 1.2.1 y 1.2.2. Por lo que se deja de ejercicio.
(ii) Dada la ecuación $a \cdot x = b$, como por hipótesis $a \neq 0$, existe a^{-1}, así:

$$\begin{array}{lcll} a^{-1}(ax) & = & a^{-1}b & \\ (a^{-1} \cdot a)x & = & a^{-1}b & \text{axioma } (\mathrm{C}_5) \\ 1 \cdot x & = & a^{-1}b & \text{axioma } (\mathrm{C}_7) \\ x & = & a^{-1}b & \text{axioma } (\mathrm{C}_6). \end{array}$$

La unicidad se deja de ejercicio. ■

Observación 1.2.10 El teorema 1.2.9 (ii) es falso en el caso que $a = 0$ y $b \neq 0$.

Definición 1.2.11 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, escribiremos $a - b$ para simbolizar el número $a + (-b)$; a tal número lo llamaremos la **diferencia** de a y b.

Teorema 1.2.12 Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes propiedades:

(i) $a - (-b) = a + b$

(ii) $a - b = 0 \iff a = b$

(iii) $a - (b + a) = a - b - a$.

Demostración:

(i) Por definición 1.2.11

$$\begin{aligned} a - (-b) &= a + (-(-b)) \\ &= a + b \text{ por Teorema 1.2.5 (i).} \end{aligned}$$

Las afirmaciones (ii) y (iii) se dejan de ejercicio. ■

Definición 1.2.13 Dados $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, escribiremos $\frac{a}{b}$, ó, $a : b$ para simbolizar el número $a \cdot b^{-1}$ y lo llamaremos **el cuociente entre** a **y** b, ó, a **dividido por** b**.**

Teorema 1.2.14 Dados $a, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\frac{a}{1} = a$.

(ii) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

(iii) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{a} = 1$.

(iv) Si $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, entonces $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$.

(v) Si $a_2 \neq 0$, $b \neq 0$, entonces $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b}{a_2 \cdot b}$

(vi) Si $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, entonces $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2}$

(vii) Si $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, entonces $\frac{a_1}{a_2} \pm \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 \pm b_1 \cdot a_2}{a_2 \cdot b_2}$

(viii) Si $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, entonces $\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1}$.

Demostración:

(i)

$$\begin{aligned} \frac{a}{1} &= a \cdot 1^{-1} && \text{por definición de cuociente.} \\ &= a \cdot 1 && \text{por teorema 1.2.3 (ii).} \\ &= a && \text{por axioma } (C_6). \end{aligned}$$

(ii) Es inmediato de la definición 1.2.13.

(iii) Es inmediato de la definición 1.2.13 y axioma (C_7).

(iv) Si $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, entonces usando la definición 1.2.13 tenemos que:

$$\begin{array}{rcl}
a_1 \cdot a_2^{-1} & = & b_1 \cdot b_2^{-1} \\
(a_1 \cdot a_2^{-1}) \cdot a_2 & = & (b_1 \cdot b_2^{-1}) \cdot a_2 \\
a_1 & = & b_1 \cdot b_2^{-1} \cdot a_2 \\
a_1 & = & b_2^{-1} \cdot (b_1 \cdot a_2) \\
a_1 \cdot b_2 & = & b_2 \cdot b_2^{-1} \cdot (b_1 \cdot a_2) \\
a_1 \cdot b_2 & = & b_1 \cdot a_2
\end{array}$$

Recíprocamente, si $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, entonces existen a_2^{-1}, b_2^{-1}. Como $a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$, entonces

$$\begin{array}{rcl}
b_2 \cdot a_1 & = & b_1 \cdot a_2 \\
(b_2 \cdot a_1) \cdot a_2^{-1} & = & (b_1 \cdot a_2) \cdot a_2^{-1} \\
b_2 \cdot (a_1 \cdot a_2^{-1}) & = & b_1 \cdot 1
\end{array}$$

Las demás afirmaciones se dejan de ejercicio. ■

Ejercicios resueltos

1. Demuestre que si $a\ , b \in \mathbb{R}$ y $a + b = b$, entonces $a = 0$.

   Solución:

$$\begin{array}{rcll}
0 & = & b + (-b) & \text{por axioma } (\mathrm{C}_3) \\
 & = & (a + b) + (-b) & \text{por hipótesis} \\
 & = & a + (b + (-b)) & \text{por axioma } (\mathrm{C}_1) \\
 & = & a + 0 & \text{por axioma } (\mathrm{C}_3) \\
 & = & a & \text{por axioma } (\mathrm{C}_2)
\end{array}$$

2. Demuestre que si $a\ , b\ \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $ab = b$, entonces $a = 1$.

   Solución:

$$\begin{array}{rcll}
1 & = & bb^{-1} & \text{por axioma } (\mathrm{C}_7) \text{ y } b \neq 0 \\
 & = & (ab)(b^{-1}) & \text{por hipótesis} \\
 & = & a(bb^{-1}) & \text{por axioma } (\mathrm{C}_5) \\
 & = & a \cdot 1 & \text{por axioma } (\mathrm{C}_7) \\
 & = & a & \text{por axioma } (\mathrm{C}_6)
\end{array}$$

3. Demuestre que si $a\ \in \mathbb{R}$ y $a + a = a$, entonces $a = 0$.

   Solución: Aplicando ejercicio resuelto 1 con $b = a$ concluimos que $a = 0$

4. Demuestre que si $a\ \in \mathbb{R}$ y $a \cdot a = a$, entonces $a = 1$ ó $a = 0$.

   Solución: Si $a \neq 0$ aplicando ejercicio resuelto 2 con $b = a$, concluimos que $a = 1$. Si $a = 0$ por teorema 1.2.4, claramente se satisface la igualdad.

5. Para todo $a \in \mathbb{R}$, demuestre que $(-1)a = -a$.

Solución:

$$\begin{array}{rcll} a+(-1)a & = & 1\cdot a+(-1)a & \text{por axioma } (\mathrm{C}_6) \\ & = & (1+(-1))a & \text{por axioma } (\mathrm{C}_3) \text{ y axioma } (\mathrm{C}_4) \\ & = & 0\cdot a & \text{por axioma } (\mathrm{C}_3) \\ & = & 0 & \text{por teorema 1.2.4} \end{array}$$

Luego $(-1)a$ es el inverso para la suma de a y por la unicidad de dicho inverso podemos concluir que $(-1)a = -a$.

6. Resuelva la ecuación $(2x-3)(3x+5) = 0$.

   Solución:

   Por teorema 1.2.8 si $(2x-3)(3x-5) = 0$, entonces $2x-3 = 0$ ó $3x+5 = 0$. Si

   $$2x - 3 = 0. \tag{1}$$

   Por definición 1.2.11, (1) es equivalente con

   $$2x + (-3) = 0. \tag{2}$$

   Luego $2x$ es el inverso aditivo de (-3) lo que implica que $2x = -(-(3)) = 3$, por teorema 1.2.5 parte (i).

   Usando teorema 1.2.9 (ii) podemos despejar x como $x = 2^{-1}\cdot 3$. Ahora, usando definición 1.2.13, $x = \dfrac{3}{2}$.

   Si $3x+5 = 0$, siguiendo el mismo razonamiento anterior se tiene,

   $$\begin{array}{rcl} 3x+5=0 & \Longrightarrow & 3x = 0+(-5) \\ & \Longrightarrow & 3x = -5 \\ & \Longrightarrow & x = 3^{-1}\cdot -5 \\ & \Longrightarrow & x = \dfrac{-5}{3} \end{array}$$

7. Demuestre que el 0 no tiene inverso multiplicativo.

   Solución:

   Supongamos que existe el inverso multiplicativo de 0, es decir, que existe $0^{-1}\in\mathbb{R}$. Luego

   $$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1+0 \\ 1\cdot 0^{-1} & = & 1\cdot 0^{-1} + 0\cdot 0^{-1} \\ 1\cdot 0^{-1} & = & 1\cdot 0^{-1} + 1 \\ 0 & = & 1 \end{array}$$

   Lo que contradice el axioma (C_6).

8. Definiendo $2 = 1+1$, demuestre que:$(-1)+(-1) = -2$

   Solución:

   $$\begin{array}{rcl} (-1)+(-1) & = & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 \\ & = & (1+1)\cdot(-1) \\ & = & 2(-1) \\ & = & -2. \end{array}$$

9. Demuestre que: $(-a) + (-a) = (-2)a$.

   Solución:

$$\begin{aligned} (-a) + (-a) &= (-1) \cdot a + (-1) \cdot a \\ &= ((-1) + (-1)) \cdot a \\ &= -2a. \end{aligned}$$

10. Usando la notación $x^2 = x \cdot x$, demuestre que: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

    Solución:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= (a+b)a + (a+b)b \\ &= aa + ba + ab + bb \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

11. Dados los números reales a, b, c; d emuestre que: $ax^2 + bx + c = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $a = b = c = 0$.

    Solución:

    Supongamos $a = b = c = 0$. Entonces usando la propiedad de la multiplicación por cero, tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0x^2 + 0b + c = 0,$$

    Cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

    Reciprocamente, supongamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.1}$$

    Haciendo $x = 0$ en (1.1), tenemos:

$$a0 + b0 + c = 0,$$

    de lo que podemos deducir: $c = 0$.

    Si $x \neq 0$, entonces

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \ \ ; \text{por lo tanto} \ \ ax + b = 0.$$

    Haciendo sucesivamente $x = 1$ y $x = -1$ en $ax + b = 0$, obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -a + b &= 0. \end{aligned}$$

    Lo que implica $a = b = 0$.

12. Dados los números reales a, b, c, a', b', c'; d emuestre que: $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $a = a', b = b', c = c'$.

    Solución: $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ es equivalente a $(a - a')x^2 + (b - b')x + (c + c') = 0$, lo que a su vez por el ejercicio (11), es equivalente a $a = a', b = b', c = c'$.

13. Encuentre a, b de modo que para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq 2$:

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

Solución:

Siguiendo las reglas de la sumas de cuocientes dadas por el teorema 1.2.14, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b)x+(-2a-b)}{(x-1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Por tanto, usando la ley de cancelación, obtenemos la igualdad de los numeradores:

$$(a+b)x + (-2a-b) = 3x+1.$$

En virtud del ejercicio (12), se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} a+b &= 3 \\ -2a-b &= 1, \end{aligned}$$

que nos dan los valores buscados de a, b: $a = -4, b = 7$. Se deja al lector en trabajo de comprobar que verdaderamente estos valores satisfacen la condición pedida.

14. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que la expresión:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

sea independiente de cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Supongamos que, cualquiera sea x, la expresión sea igual a una constante k, diferente de cero. Es decir,

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = k,$$

Por definición de cuociente tenemos:

$$ax^2+bx+c = ka'x^2+kb'x+kc'.$$

Como esta igualdad se cumple cualquiera sea x, según ejercicio (12) concluimos:

$$a = ka', \;\; b = kb', \;\; c = kc'.$$

Esto nos dice que la condición buscada es : **los coeficientes de las mismas potencias de x deben ser proporcionales**.

Para completar el ejercicio debemos demostrar que la condición es suficiente.

En efecto, si: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k$, entonces también se cumple: $\dfrac{ax^2}{a'x^2} = \dfrac{bx}{b'x} = \dfrac{c}{c'} = k$, por teorema 1.2.14. De estas tres igualdades se obtiene :

$$ax^2+bx+c = ka'x^2+kb'x+kc' = k(a'x^2+b'x+c').$$

Por tanto, la expresión

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

es independiente de x.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre la unicidad del elemento inverso para la multiplicación (teorema 1.2.2).
2. Demuestre teorema 1.2.7 (ii).
3. Demuestre unicidad en teorema 1.2.9.
4. Demuestre teorema 1.2.12 (ii) y (iii).
5. Demuestre teorema 1.2.14 (v), (vi) y (vii).
6. Demuestre que $(-a) + (-b) = -(a + b)$.
7. Demuestre que $\dfrac{1}{-a} = -\left(\dfrac{1}{a}\right)$ si $a \neq 0$.
8. Demuestre que $a(b - c) = ba - ca$.
9. Demuestre que $a^{-1} - b^{-1} = (ab)^{-1}(b - a)$.
10. Demuestre que si $a + b = 0$ y $a - b = 0$, entonces $a = b = 0$.
11. Justifique por qué a la expresión $\dfrac{0}{0}$ se le llama una forma indeterminada.
12. Demuestre que $(a + b)(a - b) = (a^2 - b^2)$.
13. Demuestre que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2ac$.
14. Demuestre que $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.
15. Demuestre que $(a/b)/c = a/(bc)$.
16. Resuelva las siguientes ecuaciones justificando cada paso:
    (a) $2x + 5 = 8$
    (b) $x^2 = 2x$
    (c) $(x - 1)(x + 2) = 0$.
17. ¿ Es $300 : 100 \cdot 3$ igual a 1 ó 9 ? Justifique.
18. ¿ Cumple la división las leyes distributivas con respecto a la suma, es decir, se cumple que:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$
$$a : (b + c) = a : b + a : c?$$

    Justifique.
19. Demuestre que si $a : b = c : d$, entonces $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$.
20. Demuestre que si $a : b = c : d$, entonces $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$.
21. Demuestre que si $a : b = c : d$, entonces $a : (a \pm b) = c : (c \pm d)$.
22. Demuestre que si $a : b = c : d$, entonces $(am + bn) : (ap + bq) = (cm + dn) : (cpm + dq)$.
23. Sean a, b dos números reales y x su **media armónica**, es decir, x satisface la igualdad: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$. Encuentre la proporción que satisface x.

24. Demuestre que $\dfrac{a-x}{b-y} = \dfrac{x-a}{y-b}$ y exprese esta regla en palabras.

25. Demuestre que $\dfrac{a-x}{b-y} = -\dfrac{x-a}{b-y}$ y exprese esta regla en palabras.

26. Demuestre que
$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2ab}{(a+b)(a+c)(b+c)} = 1.$$

27. Demuestre que
$$\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right)\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x-y}.$$

28. Demuestre que la siguiente expresión se anula cuando $x = \dfrac{a+b}{2}$:
$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}.$$

29. Simplifique la expresión
$$\frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{\frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}}} + \frac{x^2-2}{1 - \dfrac{1}{x^2 - \dfrac{\frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}}}$$

30. Encuentre a, b de modo que para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq -4, x \neq 3$:
$$\frac{6x-2}{x^2+x-12} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-3}.$$

1.3 Comparación de los números reales: axiomas de orden

Siguiendo la presentación axiomática, aceptaremos la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$, llamado conjunto de los **números reales positivos,** denotado por $\mathbb{R}^+$, que satisface las propiedades siguientes:

(O_1) $\mathbb{R}^+$ **es cerrado para la suma**, es decir, si a, b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces $a + b$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$.

(O_2) $\mathbb{R}^+$ **es cerrado para la multiplicación,** es decir, si a, b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces $a \cdot b$ pertenece a $\mathbb{R}^+$.

(O_3) **Ley de Tricotomía**: Para todo número real a se cumple una y sólo una de las afirmaciones:

(i) $a = 0$

(ii) a pertenece al conjunto $\mathbb{R}^+$

(iii) $-a$ pertenece al conjunto $\mathbb{R}^+$.

Definición 1.3.1 (i) $a < b$ si y sólo si $b - a \in \mathbb{R}^+$

(ii) $a > b$ si y sólo si $a - b \in \mathbb{R}^+$

Teorema 1.3.2 Dados los números reales a, b se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(i) $a = b$

(ii) $a < b$

(iii) $a > b$

Demostración: Aplicando el axioma (O_3) o Ley de Tricotomía al número $a - b$, se tiene una y sólo una de las afirmaciones.

(i) $a - b = 0$

(ii) $a - b \in \mathbb{R}^+$

(iii) $-(a - b) \in \mathbb{R}^+$

Las cuales se traducen en $a = b$, $a > b$, $a < b$ respectivamente usando las propiedades de la Sección 1.2. ■

Teorema 1.3.3 Dado un número real a se cumple una y sólo una de las siguiente afirmaciones:

(i) $a = 0$

(ii) $a > 0$

(iii) $a < 0$

Demostración: Es consecuencia directa del teorema 1.3.2 tomando $b = 0$. ■

Teorema 1.3.4 La relación "$<$" tiene las propiedades siguientes:

(i) No es reflexiva. Para todo $a \in \mathbb{R}$, no es verdad que $a < a$

(ii) Es asimétrica. Si $a < b$, entonces no puede tenerse $b < a$

(iii) Es transitiva. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demostración:

(i) Si para algún $a \in \mathbb{R}$, $a < a$, entonces $a - a \in \mathbb{R}^+$, lo cual implicaría que $0 \in \mathbb{R}^+$, que contradice (O_3).

(ii) Si $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$, lo que por tricotomía excluye que $a - b \in \mathbb{R}^+$, por tanto es imposible que $b < a$.

(iii) Si $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$. Si $b < c$, entonces $c - b \in \mathbb{R}^+$ por (O_1), $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo $c - a \in \mathbb{R}^+$, por tanto $a < c$. ■

Definición 1.3.5 Llamaremos conjunto de los **números negativos** al conjunto $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$.

Observemos que $0 \notin \mathbb{R}^-$, lo que pone de manifiesto que el cero no es ni positivo ni negativo. Además $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, pero por el axioma (O_3) todo número real pertenece a uno y sólo a uno de los conjuntos: $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{0\}$. Así los números reales quedan particionados como $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$. Por teorema 1.3.2 y teorema 1.3.3 (iii), se tiene que todo número negativo es menor que cualquier número positivo y el cero constituye una especie de frontera entre los dos tipos de números.

Definición 1.3.6 (i) $a \leq b$ si y sólo si $(a < b) \vee (a = b)$

(ii) $a \geq b$ si y sólo si $(a > b) \vee (a = b)$

Teorema 1.3.7 La relación "$\leq$" es:

(i) Reflexiva: $a \leq a$

(ii) Antisimétrica: Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$

(iii) Transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

Demostración:

(i) Como $a = a$, entonces $a \leq a$

(ii) Si $a \leq b$, entonces $(a < b)$ ó $(a = b)$ y si $b \leq a$, entonces $(b < a)$ o $(a = b)$. Por tanto, por teorema 1.3.3(ii) sólo es posible $a = b$.

(iii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$ tenemos cuatro posibilidades:

$a < b$ y $b < c$. En este caso la transitividad se obtiene del teorema 1.3.3(ii).

$a < b$ y $b = c$. En este caso $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b = 0$, por tanto $(b - a) + (c - b) = c - a \in \mathbb{R}^+$ y tenemos $a < c$.

$a = b$ y $b < c$. Para este caso la demostración es semejante a la anterior.

$a = b$ y $b = c$. La conclusión se sigue de la transitividad de la igualdad y la definición de la relación "$\leq$". ■

Teorema 1.3.8 $a \leq b$ si y sólo si $a + c \leq b + c$

Demostración: Si $a \leq b$ entonces $a < b$ ó $a = b$.
Si $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (b-a)+0 \in \mathbb{R}^+\\
&\Rightarrow (b-a)+(c-c) \in \mathbb{R}^+\\
&\Rightarrow (b+c)-(a+c) \in \mathbb{R}^+\\
&\Rightarrow a+c < b+c\\
&\Rightarrow a+c \leq b+c
\end{aligned}$$

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$, por la compatibilidad de la igualdad con la suma. ■

Teorema 1.3.9 (i) Si $a \leq b$ y c es un número positivo, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$

(ii) Si $a \leq b$ y c es un número negativo, entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$.

Demostración:

(i) Si $a \leq b$ entonces $a < b$ ó $a = b$. Si $a < b$, se tiene $b - a \in \mathbb{R}^+$ y como $c \in \mathbb{R}^+$ entonces por (O_2) $(b - a) \cdot c \in \mathbb{R}^+$, lo cual implica $a \cdot c < b \cdot c$. Si $a = b$, entonces por la compatibilidad de la igualdad con el producto $a \cdot c = b \cdot c$. En consecuencia, $a \cdot c \leq b \cdot c$.

(ii) Se deja como ejercicio.

Teorema 1.3.10 (i) Si $a > 0$, entonces $-a < 0$

(ii) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$

(iii) Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$

(iv) Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$

Demostración:

(i) Si $a > 0 \implies a \in \mathbb{R}^+ \implies -a \in \mathbb{R}^-$

(ii) Si $a < 0 \implies -a \in \mathbb{R}^+ \implies -a > 0$

(iii) Sea $a > 0$, supongamos $a^{-1} < 0$, entonces por teorema 1.3.9 (i) $a \cdot a > 0$. Por teorema 1.3.9(ii)

$$\begin{array}{lcl}
(a^{-1} \cdot a) \cdot a & < & 0\\
1 \cdot a & < & 0\\
a & < & 0
\end{array}$$

Lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto $a^{-1} > 0$.

(iv) Se usan los mismos argumentos que en (iii). ■

Teorema 1.3.11 $a \cdot b > 0$ si y sólo si ($a > 0$ y $b > 0$) ó ($a < 0$ y $b < 0$).

Demostración: ($\Rightarrow$) Si $a \cdot b > 0$, sabemos por teorema 1.2.8 que $a \neq 0, b \neq 0$. Si $a > 0$, entonces usando teorema 1.3.9, $a^{-1} \cdot (a \cdot b) > 0$. Lo que implica $(a^{-1} \cdot a) \cdot b > 0$ y por tanto $b > 0$.
De manera similar si $a < 0$, se concluye que $b < 0$ con lo cual tenemos nuestra implicancia.
($\Leftarrow$) Si $a > 0$ y $b > 0$, por axioma (O_2) $a \cdot b > 0$. Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $-a > 0$ y $-b > 0$, por axioma (O_2) $(-a) \cdot (-b) > 0$; por teorema 1.2.5 (iv) $a \cdot b > 0$. ■

Teorema 1.3.12 $a \cdot b < 0$ si y sólo si ($a < 0$ y $b > 0$) o ($a > 0$ y $b < 0$)

Demostración: Se deja como ejercicio.

Teorema 1.3.13 El cuadrado de un número real no nulo es positivo: Si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, entonces $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Demostración: Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $a > 0$. Por axioma (O_2), $a \cdot a > 0$, es decir, $a^2 > 0$.
Si $a \in \mathbb{R}^-$, entonces $a < 0$. Por teorema 1.3.11, $a \cdot a > 0$, así nuevamente $a^2 > 0$. ■

Teorema 1.3.14 $1 \in \mathbb{R}^+$.

Demostración: Por axioma (C_6), $1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 \\ 1 &= 1^2 \end{aligned}$$

El teorema anterior implica que $1 > 0$. ■

Teorema 1.3.15 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, entonces $a < \dfrac{a+b}{2} < b$

Demostración: Si $a < b$, entonces sumando a en ambos miembros de la desigualdad se tiene $a + a < b + a$, por tanto:

$$\begin{aligned} & a(1+1) < b + a \Rightarrow \\ & 2a < b + a \end{aligned}$$

Aplicando el mismo razonamiento, pero ahora sumando b en ambos miembros de la desigualdad $a < b$, obtenemos que $b + a < 2b$.
En virtud de la transitividad de la relación "$<$" se obtiene que

$$2a < b + a < 2b$$

dividiendo todo por $2 > 0$, se tiene lo que queríamos demostrar, $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. ■

El teorema 1.3.15 puede leerse diciendo que *entre dos números reales a, b distintos siempre existe un tercer número c*. Como a, c son distintos, puede aplicarse la conclusión a ellos y obtener un cuarto número real d, y así sucesivamente. Como este proceso puede extenderse indefinidamente, lo que obtenemos es que *entre dos números reales distintos existen infinitos números reales*. Esta importante propiedad se llama *densidad* de los números reales.

Definición 1.3.16 Decimos que un conjunto A de números reales es **denso** si y sólo si entre dos elementos distintos x, y de A existe un elemento $z \in A$ tal que $x < z < y$.

Ejercicios resueltos

1. Demuestre que si $x \leq y$, $a \leq b$ entonces $x + a \leq b + y$.

   Solución: Como $x \leq y$ y $a \in \mathbb{R}$ por teorema 1.3.8 $x + a \leq y + a$.

   Por otro lado, como $a \leq b$ e $y \in \mathbb{R}$ por teorema 1.3.8 $a + y \leq b + y$.

   Por teorema 1.3.7 (iii), (transitividad de $\leq$), concluimos que $x + a \leq b + y$.

2. Demuestre que si $0 \leq x \leq y$ y $0 \leq a \leq b$, entonces $ax \leq by$.

   Solución: Procediendo análogamente al ejercicio resuelto 1, por teorema 1.3.9 (i) $ax \leq ay$ y $ay \leq by$. Por transitividad (teorema 1.3.7 (iii)) concluimos que $ax \leq by$.

3. Demuestre que, si $0 < a < b$, entonces $b^{-1} < a^{-1}$.

   Solución: Primero observemos que $a^{-1} - b^{-1} = (ab)^{-1}(b - a))$ (ver ejercicio 1.2.9). Luego, como

   $$\begin{aligned} a > 0\,,\, b > 0 \quad &\Longrightarrow \quad ab > 0 \quad \text{por teorema 1.3.11} \\ &\Longrightarrow \quad (ab)^{-1} > 0 \quad \text{por teorema 1.3.10} \end{aligned}$$

   Como $a < b \implies b - a > 0$ (por definición 1.3.1), luego $(ab)^{-1}(b - a) > 0$ por teorema 1.3.11. Por lo tanto, $a^{-1} - b^{-1} > 0 \implies b^{-1} < a^{-1}$.

4. Demuestre que, si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

   Solución: Como $b-a$ y $b+a$ son positivos por hipótesis, entonces $(b-a)(b+a) = b^2 - a^2 > 0$ por teorema 1.3.11, luego $a^2 < b^2$.

5. Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

   Solución: Supongamos por contradicción que $a \neq 0$. Luego como $a \geq 0$ y $a \neq 0$, entonces $a > 0$ por definición 1.3.6. Usando el teorema 1.3.15 con $a = 0$ y $b = a$ tenemos que existe $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+a}{2} = \dfrac{a}{2}$ tal que $0 < \dfrac{a}{2} < a$. Ahora si tomamos $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$ concluimos que $\varepsilon < a$, lo que contradice la hipótesis. Luego, la suposición inicial es falsa y $a = 0$.

6. Demuestre que, si $x > 0$, entonces $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

   Solución: Previamente observemos que:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 &\iff x^2 + 1 \geq 2x \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\iff (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

   Por tanto, por teorema 1.3.13 $(x-1)^2 \geq 0$, por ejercicio propuesto 1.2.11, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$, por teorema 1.3.8, $x^2 + 1 \geq 2x$, como $x > 0 \implies x^{-1} > 0$ y multiplicando por x^{-1} obtenemos $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

7. Demuestre que, si $a, b, c \geq 0$ no son todos iguales, entonces $(a+b+c)(bc+ca+ab) \geq 9abc$.

   Solución:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc &= a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) - 6abc \\ &= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \end{aligned}$$

   como a, b, c no son todos iguales, al menos uno de los términos $b-c$, $c-a$, $a-b$ es distinto de cero y como todo cuadrado es no negativo y $a, b, c \geq 0$, entonces resulta la desigualdad buscada.

8. Determine el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + x > 2\}$.

   Solución:

$$\begin{aligned} x^2 + x > 2 &\iff x^2 + x - 2 > 0 \quad \text{por teorema 1.3.8} \\ &\iff (x+2)(x-1) > 0 \\ &\iff [(x+2) > 0 \text{ y } (x-1) > 0] \text{ o } [(x+2) < 0 \text{ y } (x-1) < 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x+2 > 0 \text{ y } x-1 > 0 &\iff x > -2 \text{ y } x > 1 \quad \text{por teorema 1.3.8} \\ &\iff x > 1 \\ \text{Si } x+2 < 0 \text{ y } x-1 < 0 &\iff x < -2 \text{ y } x < 1 \\ &\iff x < -2 \end{aligned}$$

   Por tanto $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 1 \text{ o } x < -2\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < -2\}$.

9. Determine el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (2x+1)/(x+2) < 1\}$.

   Solución: Claramente la expresión $(2x+1)/(x+2)$ se indetermina para $x = -2$ luego $-2 \notin A$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0 \quad \text{por teorema 1.3.8} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+2} < 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad [x-1 > 0 \text{ y } x+2 < 0] \text{ o } [x-1 < 0 \text{ y } x+2 > 0] \end{aligned}$$

   Si $x-1 > 0$ y $x+2 < 0 \iff x > 1$ y $x < -2$ (por teorema 1.3.8), sin embargo no existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaga ambas condiciones.

   Si $x-1 < 0$ y $x+2 > 0 \iff x < 1$ y $x > -2$ (por teorema 1.3.8). Por tanto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : -2 < x < 1\}$.

10. **Resolución de una desigualdad de segundo grado general.**

    Dados los números a, b, c, encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad:

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Solución:

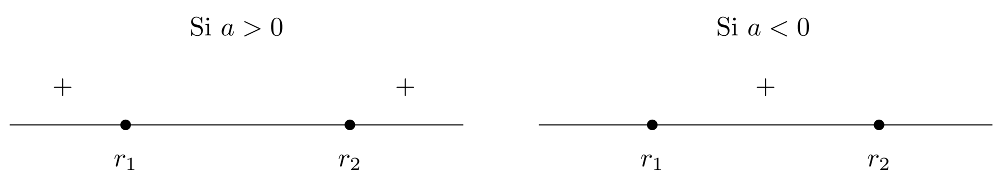
Primer caso: Supongamos que el trinomio puede escribirse en la forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

Donde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $r_1 < r_2$. (Raíces reales y distintas). Si $a > 0$, entonces el trinomio es positivo si los dos factores en x tienen el mismo signo, por lo tanto, la desigualdad se cumple cuando x es menor que ambas raíces o cuando x es mayor que ambas raíces. Es decir, la solución al problema es:

$$x < r_1 \ \text{ ó } \ x > r_2.$$

Si $a < 0$, el trinomio es positivo cuando los dos factores en x tienen el distinto signo. Por tanto, la desigualdad se cumple para x comprendido entre r_1 y r_2.



Segundo caso: Si $r_1 = r_2 = r$, raíces reales e iguales , entonces

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2.$$

Como todo cuadrado es positivo o nulo, tenemos que la desigualdad se cumple para todo $x \neq r$ si $a > 0$ y no se cumple nunca cuando $a < 0$.

Tercer caso: Si el trinomio no es factorizable en factores de primer grado con coeficientes reales, es decir, sus raíces son complejas conjugadas. Lo primero que debemos observar es que la expresión no se anula nunca y tampoco cambia de signo. Por tanto el trinomio es siempre positivo o siempre es negativo. Como el cuadrado de un número grande crece mucho más que el número, es el coeficiente a que determina el signo. Si $a > 0$, la desigualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$; si $a < 0$ no existen números reales que satisfagan la desigualdad.

11. Resolver la desigualdad $x^2 + x - 6 > 0$.

    Solución:

    Como $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, usando el análisis del ejercicio resuelto 10, los n úmeros que satisfacen la desigualdad son los x tales que $x < -3$ ó $x > 2$.

12. Resolver la desigualdad $x^2 + 3x - 4 < 0$.

    Solución:

    $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, el ejercicio resuelto 10 y la propiedad de tricotomía implican que la desigualdad se cumple para $-4 < x < 1$.

13. Resolver la desigualdad $x^2 + 2x + 2 < 0$.

    Solución:

    $x^2 + 2x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales y su coeficiente $a = 1$ es positivo, por tanto el trinomio sólo toma valores positivos y el problema propuesto no tiene solución.

14. **Resolución de una desigualdad de tercer grado factorizada.**

    Dados los números a, b, c, encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad:

    $$(x - a)(x - b)(x - c) > 0.$$

    Solución:

    Supongamos que $a < b < c$.

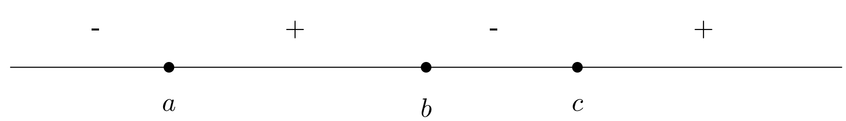
    Si $x < a$, los tres factores son negativos y, por tanto, su producto es negativo.

    Si $x = a$, entonces el producto es nulo.

    Si $a < x < b$, entonces el producto es positivo. Si $x = b$, entonces el producto es nulo. Si $b < x < c$, entonces el producto es negativo. Si $x = c$, entonces el producto es nulo. Si $x < c$, entonces el producto es positivo.

    Del análisis anterior podemos concluir que la desigualdad se cumple cuando $a < x < b$ ó $c < x$.

    Observe que al ordenar en orden creciente a, b y c es más rápido analizar los signos de los factores.

15. Resolver la desigualdad: $x(x^2 - 5x + 6) > 0$. **Solución:**

    $x(x^2 - 5x + 6) = x(x - 2)(x - 3)$, aplicando el método del ejercicio 14 tenemos que la desigualdad se satisface para los x tales que: $0 < x < 2$ ó $x > 3$.

16. Resolver la desigualdad: $(x - 2)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x - 5) > 0$.

    Solución:

    Como $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ y $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$, tenemos que:

    $$(x-2)(x^2-6x+8)(x^2-4x-5) = (x-2)(x-2)(x-4)(x+1)(x-5) = (x-2)^2(x-4)(x+1)(x-5).$$

    El factor que aparece elevado al cuadrado no influye en el signo del producto, por tanto, nuevamente se puede aplicar el método del ejercicio 14 y obtenemos que la desigualdad se satisface para los x tales que: $-1 < x < 4$ ó $x > 5$.

17. **Resolución de desigualdades fraccionarias con términos de primer grado**

Resolver la desigualdad
$$\frac{ax+b}{a'x+b'} > 0.$$

Solución:

El cuociente es positivo si y sólo si ambos factores tienen el mismo signo, por lo que la desigualdad del enunciado es equivalente a
$$(ax+b)(a'x+b') > 0.$$

Otra manera de transformar la desigualdad fraccionaria en un producto, es multiplicar la desigualdad por $(a'x+b')^2$, que por ser un cuadrado es siempre positivo salvo para $x = -\frac{b'}{a'}$.

Así, debemos resolver la desigualdad:
$$(ax+b)(a'x+b') > 0$$
usando el método del ejercicio resuelto 10.
$$(ax+b)(a'x+b') = aa'\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x+\frac{b'}{a'}\right) > 0.$$

Si $aa' < 0$, entonces los valores de x buscados estan comprendidos entre $-\frac{b}{a}$ y $-\frac{b'}{a'}$. Si $aa' > 0$, entonces los valores de x que satisfacen la desigualdad están en el complemento del conjunto comprendido entre $-\frac{b}{a}$ y $-\frac{b'}{a'}$.

18. Resolver $\frac{x-1}{x+2} > 0$.

Solución: Como $a = a' = 1$ tenemos $aa' > 0$, por ejercicio resuelto 17 , los valores buscados son $x < -2$ ó $x > 1$.

Compare con el ejercicio resuelto 9.

19. Resolver $\frac{x^2-8x+15}{x-4} < 0$.

Solución:

Suponiendo $x \neq 4$, multiplicamos la desigualdad por $(x-4)^2$ y la transformamos en :
$$(x^2-8x+15)(x-4) < 0.$$

$(x^2-8x+15)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5) < 0$, se resuelve según ejercicio 14 y se obtiene que la desigualdad se satisface para $x < 3$ ó $4 < x < 5$.

20. Resolver $3 + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{2x+1}$.

Solución: Efectuando la suma del primer miembro $3 + \frac{1}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$, la desigualdad queda como
$$\frac{3x-2}{x-1} > \frac{1}{2x+1}.$$

Para eliminar un cuociente tomamaos los inversos multiplicativos y la desigualdad se transforma en:

$$\frac{x-1}{3x-2} < 2x+1.$$

Multiplicando por $(3x-2)^2$ eliminamos el otro cuociente y nos queda:

$$(x-1)(3x-2) < (2x+1)(3x-2)^2,$$

pasando todo al segundo miembro:

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & (2x+1)(3x-2)^2-(x-1)(3x-2) \\ 0 & < & (3x-2)\left[(2x+1)(3x-2)-(x-1)\right] \\ 0 & < & (3x-2)(6x^2-2x-1) \\ 0 & < & 3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{2+\sqrt{7}}{6}\right)\left(x-\dfrac{2-\sqrt{7}}{6}\right) \\ 0 & < & 3\left(x-\dfrac{2-\sqrt{7}}{6}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{2+\sqrt{7}}{6}\right). \end{array}$$

Ahora podemos aplicar el ejercicio 14 con $a=\dfrac{2-\sqrt{7}}{6}$, $b=\dfrac{2}{3}$ y $c=\dfrac{2+\sqrt{7}}{6}$.

21. Resolver el sistema de desigualdades:

$$\begin{array}{rcl} 2x-1 & \leq & \dfrac{2}{3-x} \\ 6x-5 & < & 9x+1. \end{array}$$

Solución:
$2x-1 \leq \dfrac{2}{3-x}$ implica $2x-1-\dfrac{2}{3-x} \leq 0$. $\dfrac{(2x-1)(3-x)-2}{3-x} \leq 0$. Efectuando el producto y reduciendo términos semejantes, nos queda:

$$\frac{-2x^2+7x-5}{3-x} \leq 0.$$

$$\frac{-(2x^2-7x+5)}{-(-3+x)} \leq 0.$$

$$\frac{(2x^2-7x+5)}{(x-3)} \leq 0.$$

Multiplicando la desigualdad por $(x-3)^2$, con $x \neq 3$,

$$(2x^2-7x+5)(x-3) \leq 0$$

.

$$2\left(x^2-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right)(x-3) \leq 0,$$

Factorizando el factor de segundo grado podemos obtener una expresión a la cual aplicar el método del ejercicio 14.

$$2\left((x-1)(x-\frac{5}{2})\right)(x-3) \leq 0.$$

Por tanto, la solución de la primera desigualdad es:

$$x \leq 1 \;\text{ ó }\; \frac{5}{2} \leq x < 3.$$

Para completar el ejercicio debemos encontrar la solución a la segunda desigualdad e intersectar los conjuntos solución .

$$\begin{aligned}
6x - 5 &< 9x + 1\\
6x - 9x &< 1 + 5\\
-3x &< 6\\
x &> -2.
\end{aligned}$$

La solución al sistema es :

$$-2 < x \leq 1 \;\text{ ó }\; \frac{5}{2} \leq x < 3.$$

22. Si $x \in \mathbb{R}^-$, resuelva la desigualdad $(x-4)^2 \leq (2x+1)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 &\leq (2x+1)^2\\
(x-4)^2 - (2x+1)^2 &\leq 0\\
[(x-4) + (2x+1)]\,[(x-4) - (2x+1)] &\leq 0\\
(3x-5)(-x-3) &\leq 0\\
(3x-5)(x+3) &\geq 0\\
3(x - \frac{5}{3})(x+3) &\geq 0\\
3(x-(-3))(x-\frac{5}{3}) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Ahora se puede aplicar el ejercicio 10 y teniendo en cuenta que sólo debemos encontrar soluciones negativas, tenemos que $x \leq -3$ satisface el enunciado.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre teorema 1.3.9 (ii).
2. Demuestre teorema 1.3.10 (iv).
3. Demuestre teorema 1.3.12.
4. Demuestre que, si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.
5. Demuestre que,si $a < b$ y $c < d$, entonces $ad + bc < ac + bd$.
6. Demuestre que, si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 + b^2 = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$.
7. Demuestre que, si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 \leq ab < b^2$.
8. Demuestre que, si a, b, c, d son números positivos tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

9. Demuestre que, si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces
$$\frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2} < \frac{ac+bd}{2}.$$

10. Si a, b, c son números positivos, demuestre que $a^2+b^2+c^2 > ab+bc+ac$ y $(a+b)(b+c)(a+c) > 8abc$.

11. Demuestre que, si $a, b > 0$, entonces
$$2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

12. Use el ejercicio anterior para demostrar que si $a, b, c > 0$, entonces
$$4 \leq (a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$
y
$$9 \leq (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}).$$
Además, demuestre que $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) > 6abc$.

13. Demuestre que
$$x^3 + \frac{1}{x^3} \geq x^2 + \frac{1}{x^2}$$
para todo $x > 0$. ¿ Cuándo se cumple la igualdad ?

14. Demuestre que, si a, b, c son números reales fijos con $a > 0$, el menor valor del polinomio cuadrático $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ es $(ac - b^2)/a$. De saberse que $Q(x) \geq 0$ para todo número real x, ¿ qué podría concluirse de los coeficientes a, b, c ?

15. Demuestre que si $x < 0$, entonces $x + \dfrac{1}{x} \leq -2$.

16. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, (x+1)(x-2) > 0\}$.

17. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, (x+1)(2-x) > 0\}$.

18. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, (4x-7)(x+2) < 0\}$.

19. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, (3x-8)(3x+8) < 0\}$.

20. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2x^2 - x - 15 < 0\}$.

21. Resuelva la desigualdad $-6 + 7x - 2x^2 > 0$.

22. Resuelva la desigualdad $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-2} > 0$.

23. Resuelva la desigualdad $\dfrac{2-x}{x^2+3x+2} \geq 0$.

24. Si $a > 0$ resuelva $\dfrac{x-a}{x+a} \geq 0$.

25. Resuelva la desigualdad $2x^3 - 3x^2 \geq 0$.

26. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x^2-4}{x}$.

27. Determine el conjunto $\{m \in \mathbb{R} \,:\, mx^2 + (m-1)x + (m-1) < 0 \,;\, \forall\, x \in \mathbb{R}\}$.

28. Resuelva la desigualdad $4x^4 - 12x^2 + 9 < 0$.

29. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x}{x+2} \geq 0$.

30. Resuelva la desigualdad $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2-x}{x-1} \leq 1$.

31. Resuelva la desigualdad $\dfrac{1-2x}{x+3} \leq -1$.

32. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leq -1$.

33. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x^3-9}{x-2} \geq 0$.

34. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2} \leq 0$.

35. Resuelva el sistema de desigualdades
$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{x+3} &\leq -1 \\ \frac{x}{3} - 4 &\leq \frac{x}{4} - 3. \end{aligned}$$

36. Resuelva el sistema de desigualdades
$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &\leq 0 \\ x^2 - x &\leq 0. \end{aligned}$$

37. Resuelva el sistema de desigualdades
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &\geq 0 \\ x^3 - x^2 + 2x &\geq 0. \end{aligned}$$

1.4 Una distancia en R: el valor absoluto

Los axiomas de orden nos permiten comparar números reales, pero en virtud de la densidad de $\mathbb{R}$ sabemos que si $a < b$, entre ellos podemos insertar una infinidad de números reales distintos, lo que puede hacer perder la perspectiva de cuán lejos o cercanos están estos números. Aun cuando el estar cerca o lejos es una cuestión relativa al problema concreto en que estamos involucrados, es útil tener un método para poder discernir en cada caso. Para ello se define una distancia en $\mathbb{R}$, eligiendo un punto de referencia, en principio, el cero. Esta idea la realiza el llamado *valor absoluto* de un número.

Definición 1.4.1 Llamaremos **valor absoluto** del número $a \in \mathbb{R}$, denotado por $\mid a \mid$ al número:

$$\mid a \mid = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Existen formas equivalentes de definir el valor absoluto. Por ejemplo, $|a| = \max\{a, -a\}$, $|a| = \sqrt{a^2}$.

La definición 1.4.1 nos dice en particular que $\mid 0 \mid = 0$, $\mid 4 \mid = 4$, $\mid -4 \mid = 4$. En general, podemos apreciar que el número a y su inverso aditivo $-a$ están a igual distancia del cero. Usando algunas consecuencias del orden de $\mathbb{R}$, sabemos que todo número negativo es menor que uno positivo. Así, podemos hacer el siguiente gráfico:

Figura 1.4.1: Valor absoluto

Todavía no hay ninguna razón que pueda deducirse de los axiomas para pensar a $\mathbb{R}$ como el continuo geométrico de una línea recta.

Teorema 1.4.2 (i) $|a| \geq 0$.

(ii) $|a| = |-a|$.

(iii) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(iv) $|a| = 0 \iff a = 0$.

(v) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

(vi) Si $b > 0$, $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$.

(vii) Si $b > 0$, $|a| \geq b \iff a \geq b$ ó $a \leq -b$.

(viii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular).

Demostración:

(i) Si $a \in \mathbb{R}$, por tricotomía tenemos las posibilidades: $a > 0$ o $a = 0$ o $a < 0$. Analicemos cada una de ellas.

- Si $a > 0$ entonces $|a| = a > 0$
- Si $a = 0$ entonces $|0| = 0$
- Si $a < 0$ entonces $-a = |a| > 0$

Así en todos los casos $|a| \geq 0$

(ii) Nuevamente y así se recomienda en toda demostración relativa al valor absoluto, separaremos los casos, usando el axioma de tricotomía.

- Si $a > 0$ entonces $-a < 0$, por tanto: $|a| = a$ y $|-a| = -(-a) = a$, por teorema1.2.5. Así, en este caso se cumple $|a| = |-a|$
- Si $a = 0$ entonces $|0| = |-0| = 0$
- Si $a < 0$ entonces $-a > 0$, por tanto: $|a| = -a, |-a| = -a$ y así vemos que también se tiene en este caso, $|a| = |-a|$.

(iii) Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$. Además, siendo a positivo $(-a)$ es negativo o cero, por tanto $-|a| \leq a \leq |a|$.

Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$ y $-a > 0$. Por tanto $a < -a$ y tenemos que $-|a| = a < -a = |a|$, cumpliéndose también en este caso la propiedad.

(iv) ($\Leftarrow$) Si $a = 0$, por definición $|a| = |0| = 0$

($\Rightarrow$) $a \in \mathbb{R}$, por tricotomía $a > 0$ ó $a < 0$ o $a = 0$. Para tener la conclusión debemos descartar las posibilidades $a > 0$ y $a < 0$.

* Si $a > 0$ entonces $|a| = a > 0$, lo que contradice la hipótesis, por tanto no puede darse $a > 0$.
* Si $a < 0$ entonces $|a| = -a > 0$, también contradice la hipótesis.

Así, lo único posible es que $a = 0$.

(v) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, por tricotomía se tiene que $(a \cdot b > 0)$ ó $(a \cdot b = 0)$ ó $(a \cdot b < 0)$.

- Si $a \cdot b > 0$ entonces por teorema 1.3.11, ($a > 0$ y $b > 0$) ó ($a < 0$ y $b < 0$). Por definición de valor absoluto se tiene: $|a \cdot b| = a \cdot b$ y para la primera posibilidad $|a| = |a|$ y $|b| = b$, por lo que $|a| \cdot |b| = a \cdot b$, cumpliéndose el teorema. Si se da la segunda posibilidad, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$ así $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. Nuevamente obtenemos la conclusión.
- Si $a \cdot b = 0$ entonces por teorema 1.2.8, $a = 0$ o $b = 0$, entonces $|a \cdot b| = 0 = |a| \cdot |b|$.
- Si $a \cdot b < 0$ se deja como ejercicio, pues es análoga al caso $a \cdot b > 0$.

(vi) ($\Rightarrow$)

* Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ y por hipótesis $|a| \leq b$ lo que implica que $a \leq b$. Como $b \geq 0$ entonces $-b \leq 0$ y por tanto $-b \leq a \leq b$.
* Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$ y por hipótesis $-a \leq b$ y como $-a \geq 0$ y $-b \leq 0$ se tiene $-b \leq a \leq -a \leq b$, es decir, $-b \leq a \leq b$.

($\Leftarrow$)

* Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$. Por hipótesis $|a| \leq b$.
* Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$. Por hipótesis $-a \leq b$ y por tanto $|a| \leq b$.

(vii) ($\Rightarrow$) Supongamos $|a| \geq b$. Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ y por tanto $a \geq b$. Si en cambio $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y en este caso $-a \geq b$, por teorema 1.3.9, $a \leq -b$.

($\Leftarrow$) Es análoga a la correspondiente implicación de (vi).

(viii) En virtud de (vi), demostrar (viii) es equivalente a demostrar: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$, que es lo que haremos.

Por (iii)

$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq |a| \\ -|b| &\leq b \leq |b| \end{aligned}$$

sumando miembro a miembro ambas desigualdades se obtiene (vii). ■

Ejercicios resueltos

1. Analice en qué casos la desigualdad triangular se transforma en una igualdad.

   Solución: (i) Si a y b son números positivos, $a+b$ es positivo, entonces tenemos:

   $$|a+b| = a+b = |a|+|b|$$

   (ii) Si a y b son números negativos, $a+b$ es negativo, entonces tenemos:

   $$|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a|+|b|$$

   (iii) Si a y b tienen signos diferentes, la desigualdad es una desigualdad estricta. Por ejemplo, si $a=-4$ y $b=2$, entonces $|a+b| = |(-4)+2| = |-2| = 2$, en cambio, $|a|+|b| = 4+2 = 6$

2. Demuestre que $||a|-|b|| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$.

   Solución: Aplicando la desigualdad triangular tenemos, $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$. Luego $|a|-|b| \leq |a-b|$. Análogamente $|b| = |b-a+a| \leq |b-a|+|a| = |a-b|+|a|$ por desigualdad triangular y teorema 1.4.2 (ii). Entonces $-|a-b| \leq |a|-|b|$. Por tanto, de estas dos desigualdades y el teorema 1.4.2 (vi) concluimos que $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

   Finalmente, $|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$ por desigualdad triangular y teorema 1.4.2 (ii).

3. Resuelva la ecuación $|x-1| = 3$.

   Solución: Por definición de valor absoluto $|x-1| = 3$ implica $x-1 = \pm 3$. Si $x-1=3$, tenemos $x=4$.

   Si $x-1=-3$, tenemos $x=-2$.

4. Resuelva la ecuación $|3x-5|+3=0$.

   Solución: Como el valor absoluto no toma valores negativos, la ecuación propuesta no tiene solución.

5. Resuelva la ecuación $|x+2| = |x-4|$.

   Solución: Debemos analizar dos casos: **Primer caso**. Las cantidades entre barras tienen el mismo signo, entonces $x+2 = x-4$, por tanto, $2=-4$. Como esto es imposible, en este caso no hay solución. **Segundo caso**. Las cantidades entre barras tienen distinto signo, entonces $x+2 = -(x-4) = -x+4$, por tanto, $x=1$.

6. Resuelva la ecuación $|x^2-4x| = 4|x-4|$.

   Solución:

   $$\begin{aligned} |x^2-4x| &= 4|x-4| \\ |x(x-4)| &= 4|x-4| \\ |x||(x-4)| &= 4|x-4| \\ |x| &= 4, \text{ si } x \neq 4 \\ x &= -4. \end{aligned}$$

7. Determine el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, |2x+3| \leq 6\}$.

   Solución: Si $|2x+3| \leq 6$ por teorema 1.4.2 (vi) tenemos que $-6 \leq 2x+3 \leq 6 \iff -9 \leq 2x \leq 3 \iff -\dfrac{9}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$.

   Por lo tanto, $A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, -\dfrac{9}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}\}$.

8. Resuelva la inecuación $|5x-8|>4$.

Solución:

$$\begin{aligned} 5x-8>4 \quad &\text{o} \quad 5x-8<-4 \\ 5x>12 \quad &\text{o} \quad 5x<4 \\ x>\frac{12}{5} \quad &\text{o} \quad x<\frac{4}{5} \end{aligned}$$

9. Resuelva la inecuación $|x-4|\geq|2x-1|$.

Solución: Como las expresiones entre barras cambian de signo cuando $x=4$ y cuando $x=\frac{1}{2}$, analizaremos las distintas posibilidades que esto implica.

Si $x\leq\frac{1}{2}$, ambas expresiones son negativas, entonces la desigualdad queda como

$$-(x-4)\geq-(2x-1),$$

que da los valores $x\geq-3$. Por tanto, tenemos que $-3\leq x\leq\frac{1}{2}$.

Si $\frac{1}{2}<x<4$, las expresiones entre barras tienen distintos signos y nos queda la desigualdad:

$$2x-1\leq 4-x,$$

que tiene solución $x\leq\frac{5}{3}$. Junto a la suposición bajo la cual estamos trabajando , da la solución $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}$.

Si $x>4$, ambas expresiones son positivas y la desigualdad toma la forma:

$$x-4\geq 2x-1.$$

Lo que implica $-3\geq x$ que es incompatible con $x>4$, por tanto, en este caso no hay solución.

En síntesis, la desigualdad dada tiene por solución :$-3\leq x\leq\frac{5}{3}$.

10. Determine el conjunto $B=\{x\in\mathbb{R}\ :\ |x-1|\leq|x|\}$.

Solución:

Si $|x-1|\leq|x|$ por teorema 1.4.2 (vi), entonces $-|x|\leq x-1\leq|x|$. Luego, $B=B_1\cap B_2$ donde $B_1=\{x\in\mathbb{R}\ :\ -|x|\leq x-1\}$ y $B_2=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x-1\leq|x|\}$.

Si $-|x|\leq x-1$, entonces $|x|\geq 1-x$. Luego, por teorema 1.4.2 (vii) $x\geq 1-x$ o $x\leq -(1-x)=x-1$, es decir, $2x\geq 1$ o $1\leq 0$. Por tanto, sólo tenemos que $2x\geq 1 \iff x\geq\frac{1}{2}$. (¿ Por qué ?). Luego, $B_1=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x\geq\frac{1}{2}\}$. Si $x-1\leq|x|$ por teorema 1.4.2 (vii), $x-1\leq x$ ó $x\leq-(1-x)$ lo que es equivalente a $0\leq 1$ o $1\leq 0$. Por lo que esta proposición es siempre verdadera. Luego $B_2=\mathbb{R}$. Como $B=B_1\cap B_2=B_1\cap\mathbb{R}=B_1=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\geq\frac{1}{2}\}$.

11. Resuelva la desigualdad $|x+\frac{1}{x}|\geq 4$.

Solución: Si $x\neq 0$, $|x+\frac{1}{x}|=\frac{|x^2+1|}{|x|}=\frac{x^2+1}{|x|}$, pues x^2+1 es positivo para todo $x\in\mathbb{R}$.

Por tanto, la desigualdad enunciada se puede escribir como $\frac{x^2+1}{|x|}\geq 4$. Multiplicando la desigualdad por $|x|$, obtenemos:

$$x^2+1\geq 4|x|,$$

lo que da origen a dos desigualdades:

(a) $x^2 - 4x + 1 \geq 0$, si $x > 0$.

(b) $x^2 + 4x + 1 \geq 0$, si $x < 0$.

Ambas deben ser resueltas con el método del ejercicio 10 de la sección 1.3.

12. Si a, b, c son números dados tales que $a < b < c$. Encuentre los distintos valores que puede tomar $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$.

Solución:

Si $x < a$, todas las expresiones entre barras son negativas, por tanto,

$$f(x) = -(x - a) - (x - b) - (x - c) = -3x + a + b + c.$$

$x = a$, $f(a) = -2x + b + c$, que coincide con la expresión anterior. Si $a < x \leq b$,

$$f(x) = x - a - (x - b) - (x - c) = -x - a + b + c.$$

Si $b < x \leq c$,

$$f(x) = x - a + x - b - (x - c) = x - a - b + c.$$

Si $x > c$,

$$f(x) = x - a + x - b + x - c = 3x - a - b - c.$$

13. Escriba $f(x) = |x + 1| + |x - 1| - 2|x|$ sin que aparezcan los signos del valor absoluto.

Solución: Siguiendo un procedimiento similar al del ejercicio 12, obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 2 - 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

14. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{2x - 1}$ para $2 \leq x \leq 3$.

Encuentre una constante M de modo que $|f(x)| \leq M$ para todo x tal que $2 \leq x \leq 3$.

Solución: Como $|f(x)| = \dfrac{|2x^2 - 3x - 1|}{|2x - 1|}$. Por la desigualdad triangular

$$|2x^2 - 3x - 1| \leq 2|x^2| + 3|x| + 1 \leq 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$$

ya que $|x| \leq 3$. Por otro lado, de la parte (a) $|2x - 1| \geq 2|x| - 1 \geq 2 \cdot 2 - 1 = 3$, ya que $|x| \geq 2$. Luego $\dfrac{1}{|2x - 1|} \leq \dfrac{1}{3}$ para $x \geq 2$. Por lo tanto, $|f(x)| \leq \dfrac{28}{3}$.

Luego, podemos escoger $M = \dfrac{28}{3}$. Observemos que cualquier $M > \dfrac{28}{3}$ resuelve el problema, y es probable que $\dfrac{28}{3}$ no sea la elección mínima posible para M.

15. $\left| \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} \right| \leq 1$.

Solución: $\left| \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} \right| = \left| \dfrac{(x - 3)(x - 1)}{(x - 1)(x - 1)} \right| = \left| \dfrac{x - 3}{x - 1} \right|$. Por tanto la desigualdad se redude a:

$$|x - 3| \leq |x - 1|, \text{ la que es equivalente a } |x - 3| \leq |x - 1|.$$

Analizaremos los distintos casos: Si $x \leq 1$, ambas expresiones entre barras son negativas, por lo cual tenemos:

$$-(x-3) \leq -(x-1).$$

Esto implica $3 \leq 1$, como esto es imposible, no hay solución en este caso.

Si $1 < x \leq 3$, las expresiones entre barras tienen signos distintos, por tanto:

$$-x+3 \leq x-1.$$

Lo que nos da $2 \leq x$ que junto a la suposición $1 < x \leq 3$ nos da $2 \leq x \leq 3$. El último caso por analizar es $x > 3$, que conduce a $-3 \leq -1$, que se cumple siempre. Así, la solución es $x \geq 2$.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que $|a| = \max\{a, -a\} = \sqrt{a^2}$.
2. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:
   (a) $|a^2| = a^2$
   (b) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$
   (c) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$
   (d) $|a+b| = |a| + |b|$ si y solo si $ab \geq 0$
   (e) $a|b| \leq |ab|$.
3. Demuestre que, $x < y < z$ si y sólo si $|x-y| + |y-z| = |x-z|$.
4. Demuestre que si $a < x < b$ y $a < y < b$, entonces $|x-y| < b-a$.

En los siguientes ejercicios encuentre los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades:

5. $|4x-5| = 13$
6. $|4x-5| \leq 13$
7. $|x^2-1| = 3$
8. $|x^2-1| \leq 3$
9. $|x-1| = |x+1|$
10. $|x-1| > |x+1|$
11. $2|x| + |x-1| = 2$
12. $|x| + |x+1| < 2$
13. $\left|\dfrac{x^2-1}{x+1}\right| \leq 3.$
14. $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}\right| \leq 3.$
15. $\left|\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}\right| \leq 5.$

16. $\left|\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}\right| < 2.$

17. $\left|\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}\right| = 2.$

18. $\left|\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}\right| > 2.$

19. Si $f(x) = |x-2| + |1-2x|$. Encuentre una expresión para $f(x)$ que no contenga valores absolutos.

20. Si $x = 8a + 4b - 3$, $y = 5a + 13b + 4$

    $20,84 < a < 20,85$ y $-5,64 < b < -5,63$. Encuentre números K; M tales que:

$$|x+y| < K \text{ y } |x-y| < M.$$

21. Encuentre el valor máximo de y de modo que para todo x se cumpla:

$$|x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n| \geq y,$$

    con $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. ¿Cuándo se cumple la igualdad ?

22. Demuestre que si $|x| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$.

23. Si $d(x,y) = |x-y|$ representa la "distancia entre x e y". Demuestre que

    (a) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
    (b) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
    (c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.
    (d) Encuentre el conjunto $A = \{y \in \mathbb{R} \,:\, d(y, \frac{1}{2}) \leq 3\}$.
    (e) Encuentre el conjunto $B = \{y \in \mathbb{R} \,:\, d(y, -4) < 5\}$.
    (f) Dados x_0, $r \in \mathbb{R}$, encuentre el conjunto $C = \{y \in \mathbb{R} \,:\, d(y, x_0) < r\}$.

1.5 La continuidad de R: el axioma del supremo

Definición 1.5.1 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es una **cota superior** de A si y sólo si y es un número real y para cada $x \in A, x \leq y$.

Definición 1.5.2 Si A es un conjunto de números reales, el número y es el **supremo** de A si y sólo si y es una cota superior de A y para cada z que es cota superior de A se tiene $y \leq z$. Es decir el supremo es la menor de las cotas superiores.

Teorema 1.5.3 Si A es un conjunto de números reales entonces y es el supremo de A si y sólo si y es una cota superior de A y para cada número real positivo ε existe un x en A tal que $y - \varepsilon < x$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea y el supremo de A. Entonces por definición y es una cota superior.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Supongamos por contradicción que no existe $x \in A$ tal que $y - \varepsilon < x$, en tal caso, esto es equivalente a afirmar que $x \leq y - \varepsilon$, para todo x en A, por tanto $y - \varepsilon$ es una cota superior de A pero $y - \varepsilon < y$, lo que contradice la hipótesis que y es el supremo de A. Así debe existir al menos un $x \in A$ mayor que $y - \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis y es una cota superior. Para que y sea el supremo de A, debe ser la menor de las cotas superiores.

Supongamos que existe una cota superior de A, z menor que y. Entonces $z < y$ y $x < z$ para todo $x \in A$. Como $z < y$ entonces $y - z > 0$. Aplicando la hipótesis con $\varepsilon = y - z$, tenemos que existe $x \in A, x > y - (y - z)$. Es decir, existe $x \in A$ tal que $x > z$. Pero esto contradice que z es cota superior de A. La contradicción proviene de suponer la existencia de una cota superior de A menor que y. Así, y es la menor cota superior de A y, por tanto, su supremo. ■

Teorema 1.5.4 Un conjunto de números reales puede tener a lo más un supremo.

Demostración: Supongamos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tenga dos supremos: $y, z; y \neq z$. Más precisamente supongamos $z < y$. Como en la demostración del teorema 1.5.3 se tiene $y - z > 0$. Tomando este número positivo como un ε particular, por definición de supremo podemos concluir que existe $x \in A$ tal que $x > y - (y - z)$, lo que implica que $x > z$, que contradice que z sea supremo de A. Por tanto, existe a lo más un supremo de un conjunto de números reales. ■
Es interesante observar que el conjunto vacío es acotado superiormente por cualquier número real. Esto se obtiene usando reducción al absurdo. Luego, el supremo de vacío es menos infinito.

Axioma del Supremo : Si un conjunto no vacío de números reales tiene una cota superior, entonces tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Cada una de las definiciones y conclusiones relativas a cotas superiores y supremos tiene un paralelo en la definición de cota inferior e ínfimo. Las demostraciones de los teoremas son totalmente similares a las ya demostradas, por lo que se deja como ejercicio.

Definición 1.5.5 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es una **cota inferior** de A si y sólo si y es un número real y para cada x en A, $x \geq y$.

Definición 1.5.6 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es el **ínfimo** de A si sólo si y es una cota inferior de A y para cada z que es una cota inferior de A, $y \geq z$. Es decir, el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores.

Teorema 1.5.7 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es el ínfimo de A si y sólo si y es una cota inferior de A y para cada número real positivo ε existe un x en A tal que $x < y + \varepsilon$.

Demostración: Ejercicio.

Teorema 1.5.8 Un conjunto de números reales puede tener a lo más un ínfimo .

Demostración: Ejercicio.
Observemos que el conjunto vacío es acotado inferiormente por cualquier número real. Luego, el ínfimo de vacío es mas infinito.

Teorema 1.5.9 Si un conjunto no vacío de números reales tiene una cota inferior, entonces tiene ínfimo en $\mathbb{R}$.

Demostración: Ejercicio.

Definición 1.5.10 Si A es un conjunto de números reales, entonces p es el **primer elemento** (respectivamente u es el **último elemento**) de A si y sólo si p es un elemento de A y para cada x en A, $p \leq x$ (respectivamente $u \in A$, $x \leq u$).

Teorema 1.5.11 Un conjunto de números reales tiene a lo más un único primer elemento (respectivamente último).

Teorema 1.5.12 Todo conjunto de números reales que tiene primer (respectivamente último) elemento tiene ínfimo (respectivamente supremo).

El recíproco del teorema 1.5.12 es falso. Pues, existen conjuntos de números reales que poseen ínfimo y supremo sin tener primer y/o último elemento. Por ejemplo, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

tiene supremo, pero no último elemento y también tiene ínfimo, sin tener primer elemento. Ver ejercicio. Este ejemplo, además, nos muestra claramente que supremos o ínfimos no son necesariamente elementos del conjunto. Pero si pertenecen al conjunto, son a la vez último o primer elemento según el caso. Esto puede visualizarse en el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Definición 1.5.13 Si A es un conjunto de números reales, entonces A es **continuo** si y sólo si A es denso y vale el Axioma del Supremo.

En particular, $\mathbb{R}$ es un conjunto continuo y veremos que no existen otros subconjuntos continuos de $\mathbb{R}$. Pero la continuidad según la definición 1.5.13, no es equiparable intuitivamente a la continuidad de la línea recta. Para poder ver que ambas ideas reflejan lo mismo es preciso hacer un estudio más fino de los números reales.

Las consecuencias de mayor trascendencia del Axioma del Supremo son la existencia de números irracionales y la propiedad arquimediana de los números reales. Aunque ambos podrían ser presentados en este párrafo, hemos preferido hacerlo al ir estudiando los conjuntos particulares de números, para poder enfatizar la potencia de las consecuencias de este axioma y al mismo tiempo recordar las diferencias cualitativas entre distintos tipos de números.

Por otro lado, con el Axioma del Supremo se completa el conjunto de axiomas que caracterizan totalmente a $\mathbb{R}$, es decir, existe un único conjunto que verifica los axiomas anteriormente descritos. La unicidad de $\mathbb{R}$ puede ser vista en McShane, Spivak, Libro de Problemas.

Ejercicios resueltos

Analice la existencia de cotas inferiores, superiores, mayor y menor elemento, supremos e ínfimo para los siguientes conjuntos, donde a, b son números fijos.

1. $A_1 = \{ax + b; -2 \leq x \leq 3\}$

   Solución: Si $a > 0$, entonces

   $$-2 \leq x \leq 3$$

   $$-2a \leq 3a$$

   $$-2a + b \leq ax + b \leq 3a + b, \text{para todo } -2 \leq x \leq 3.$$

   Por tanto, $-2a + b$ es una cota inferior y $3a + b$ es una cota superior de A_1. Además, estas cotas pertenecen al conjunto , por lo que son el menor y mayor elemento, respectivamente y también el ínfimo y el supremo de A_1. Si $a < 0$, entonces

   $$-2 \leq x \leq 3$$

   $$3a \leq\leq -2a$$

   . Por tanto, los roles de $-2a + b$ y $3a + b$ se inverten y se tiene que:

   $$\inf A_1 = 3a + b, \quad \sup A_1 = -2a + b.$$

2. $A_2 = \{ax + b; -2 < x \leq 3\}$

   Solución: Si $a > 0$, se tiene como en el caso anterior:

   $$-2a + b < ax + b \leq 3a + b, \text{para todo } -2 < x \leq 3.$$

   La única diferencia con el respectivo caso anterior es que $-2a + b$ no pertenece al conjunto, por lo cual aunque sigue siendo cota inferior e ínfimo de A_2, no es el menor elemento. Más aún , A_2, no tiene el menor elemento. En efecto, supongamos que x^* es el menor elemento de A_2. Entonces, $-2 < x^*$ y $-2a + b < -2x^* + b < -2x + b$, para todo $-2 < x \leq 3$. Pero, la propiedad de densidad de los números reales asegura la existencia de un z^* tal que

   $$-2 < z^* < x^*,$$

   lo que a su vez implica

   $$-2z^* + b < -2x^* + b.$$

   Pero, esto contradice el hecho que x^* s el menor elemento de A_2.

3. $A_3 = \{ax + b; -2 \leq x < 3\}$

   Solución: Usando los mismos argumentos se obtiene:

   $$\sup A_3 = 3a + b, \inf A_3 = -2a + b, \text{ si } a > 0.$$

   $$\inf A_3 = 3a + b, \sup A_3 = -2a + b, \text{ si } a < 0.$$

   Si $a > 0$, A_3 no tiene mayor elemento; si $a < 0$, A_3 no tiene menor elemento.

4. $A_4 = \{ax + b; -2 < x < 3\}$

   Solución:

   El ínfimo y el supremo son los mismos que en los casos anteriores, pero A_4 no tiene menor ni mayor elemento.

5. Demuestre que el conjunto $A_5 = \{ax + b, x \in \mathbb{R}\}$ no es acotado ni superior ni inferiormente.

   Solución: Supongamos que A_5 es acotado superiormente y que $a > 0$. Entonces, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:
$$ax + b \leq M, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R},$$
   lo que implica,
$$x \leq \frac{M+b}{a}, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Pero, esto nos dice que $\dfrac{M+b}{a}$ es una cota superior de $\mathbb{R}$, lo cual es una contradicción. De la misma forma se demuestra que A_5 no es acotado inferiormente.

6. Encuentre cotas superiores e inferiores para el conjunto $\{x^2 + x - 2; \;\; -2 \leq x \leq 1\}$.

   Solución: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, del método para analizar el signo de un trinomio de segundo grado, visto en el ejercicio 10 de la sección 1.3, sabemos que este trinomio es negativo para $-2 < x < 1$, se anula en $x = -2$ y $x = 1$ y para los restantes valores de x es positivo. Por tanto, 0 es una cota superior del conjunto. Para encontrar una cota inferior, que si existe, es negativa; Debemos encontrar un número k tal que para todo $z < k$, la ecuación
$$x^2 + x - 2 = z$$
   no tenga solución en $\mathbb{R}$. $x^2 + x - 2 - z = 0$ no tiene raíces reales si
$$1 + 4(2 + z) < 0,$$
   es decir, $z < -\dfrac{9}{4} = -2,25 = k$, el número buscado.

   En consecuencia, para todo $z < -2,25$ no existe x tal que $x^2 + x - 2 = z$. Por tanto, cualquier número menor o igual que 2,25 es una cota inferior de nuestro conjunto.

   Ahora veamos si -2,25 pertenece al conjunto. Para ello debemos resolver la ecuación $x^2 + x - 2 = -2,25$, que tiene por solución $x = -0,5$. Así, -2,25 es el menor elemento del conjunto y por tanto, su ínfimo.

7. Dada la expresión $f(x) = \dfrac{6(x^2 + 2x - 1)}{-2x^2 - 3}$,

   (a) ¿ Para qué valores de x tiene sentido $f(x)$?

   (b) Demuestre que $f(x)$ está acotada superiormente por 3 e inferiormente por -4.

   (c) ¿ Cómo elegir x para que $f(x) = 3$?

   (d) ¿ Cómo elegir x para que $f(x) = -4$?

   (e) ¿ Cuál es el supremo y el ínfimo del conjunto $\{f(x); \; x \in \mathbb{R}\}$?

   Solución:

   (a) Para que la expresión $f(x)$ tenga sentido es necesario excluir los valores de x que anulan el denominador. $-2x^2 - 3 = 0$ es equivalente a $2x^2 + 3 = 0$, pero como todo número al cuadrado es positivo o nulo, $2x^2 + 3$ no se anula para ningún valor de x. Por tanto, $f(x)$ vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Para poder demostrar que $f(x)$ es acotada superiormente por 3, supondremos que esto es verdad, así podremos encontrar una expresión para iniciar la demostración.
$$\frac{6(x^2 + 2x - 1)}{-2x^2 - 3} = \frac{6(1 - 2x - x^2)}{2x^2 + 3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{6(1-2x-x^2)}{2x^2+3} &< 3 \\
6-12x-6x^2 &< 6x^2+9 \\
0 &< 12x^2+12x+3 \\
0 &< 3(4x^2+4x+1) \\
0 &< 3(2x+1)^2
\end{aligned}$$

Como la última desigualdad es siempre válida, en rigor ésta debe ser el punto de partida de la verdadera demostración.

Para demostrar que $f(x)$ es acotada inferiormente por -4, supondremos que en borrador hicimos el procedimiento ya mostrado y ahora haremos la demostración :

$$\begin{aligned}
0 &< 2(x-3) \\
0 &< 2(x^2-6x+9) \\
0 &< 2x^2-12x+18 \\
-8x^2-12 &< 6-12x-6x^2 \\
-4(2x^2+3) &< 6-12x-6x^2 \\
-4 &< \frac{6(1-2x-x^2)}{2x^2+3}
\end{aligned}$$

(c) La ecuación $f(x) = 3$ es equivalente a $2x+1 = 0$, lo que nos da $x = -\dfrac{1}{2}$. La ecuación $f(x) = -4$, tiene solución $x = 3$. Es decir, $f(3) = -4$ y $f(-\dfrac{1}{2}) = 3$.

8. Demuestre que en los conjuntos finitos último elemento y supremo coinciden.

   Solución: Sea F un subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Sea $u \in F$ el mayor de todos los elementos de F. Como el conjunto es finito, basta comparar los elementos de F todos con todos y hallar tal u. Luego $x \leq u$ para todo $x \in F$. Por tanto, u es el último elemento. Por otro lado, u es cota superior de F y si consideramos otra cota superior c de F ella satisface que $x \leq c$ para todo $x \in F$. En particular $u \in F$, luego $u \leq c$. Por tanto, u es la menor cota superior. Luego $u = \sup F$.

9. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío, definimos por $-A$ al conjunto $\{-x \; : \; x \in A\}$. Demuestre que si A es acotado inferiormente, entonces $-A$ es acotado superiormente e $\inf A = -\sup(-A)$.

   Solución: Si A es acotado inferiormente, sea c una cota inferior de A, entonces $c \leq x$ para todo $x \in A$. Luego $-x \leq -c$ para todo $x \in A$. Esto implica que $-c$ es una cota superior de $-A$, y por axioma del supremo, existe el supremo de $-A$. Sea $a = \sup(-A)$ y $b = \inf A$, como b es la mayor cota inferior de A, $b \leq x$ para todo $x \in A$. Luego $-x \leq -b$ para todo $x \in A$, lo que implica que $-b$ es cota superior de $-A$. Si c es una cota superior de $-A$, $-x \leq c$, para todo $x \in A$, lo que implica que $-c \leq x$ para todo $x \in A$. Por tanto, $-c$ es una cota inferior de A y como $b = \inf A$, debemos tener que $-c \leq b$. Lo anterior implica que $-b \leq c$; y siendo c una cota superior arbitraria de $-A$, concluimos que $-b$ es el supremo de $-A$. Como el supremo de un conjunto es único, por teorema 1.5.4, $-b = a$, como queríamos demostrar.

10. Demuestre que $\sup \mathbb{R}^- = \inf \mathbb{R}^+ = 0$.

    Solución: Como $\mathbb{R}^+ = -\mathbb{R}^-$, por ejercicio resuelto 2, tenemos que $\sup \mathbb{R}^- = \inf \mathbb{R}^+$. Demostremos que $\sup \mathbb{R}^- = 0$. Supongamos que no es así, como 0 es una cota superior de $\mathbb{R}^-$, entonces $\sup \mathbb{R}^- < 0$. Del teorema 1.3.15 tenemos que $x = \dfrac{\sup \mathbb{R}^-}{2}$ satisface que

$\sup \mathbb{R}^- < x < 0$. Luego, $x \in \mathbb{R}^-$ y $\sup \mathbb{R}^- < x$, lo que contradice la definición de $\sup \mathbb{R}^-$. Por tanto, $\sup \mathbb{R}^- = 0$ como queríamos demostrar.

11. Sean a y b números reales. Demuestre que si para todo $\varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$, entonces $a \leq b$.

    Solución: Como $a - b < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, $a - b$ es cota inferior de $\mathbb{R}^+$. Por el ejercicio anterior, $\inf \mathbb{R}^+ = 0$. Por lo tanto, $a \leq b$.

12. Demuestre que $\mathbb{R}$ no es acotado superior ni inferiormente.

    Solución: Supongamos que $\mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, como $M+1 \in \mathbb{R}$ tendríamos que $M+1 \leq M$, lo que implica que $1 \leq 0$; pero esto es una contradicción con el teorema 1.3.14. Por tanto, $\mathbb{R}$ no puede estar acotado superiormente.

    Ahora si $\mathbb{R}$ fuera acotado inferiormente, entonces por ejercicio resuelto 2 $-\mathbb{R}$ estaría acotado superiormente y como $-\mathbb{R} = \mathbb{R}$, tendríamos que $\mathbb{R}$ es acotado superiormente. Por tanto, $\mathbb{R}$ no puede estar acotado inferiormente.

13. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} \\ A_3 &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} \\ A_4 &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

    Demuestre que : $\sup A_1 = \sup A_2 = \sup A_3 = \sup A_4 = b$ e $\inf A_1 = \inf A_2 = \inf A_3 = \inf A_4 = a$.

    Solución: Es fácil ver que b es cota superior de A_1, A_2, A_3 y A_4 por la definición de los conjuntos. Ahora, usando el teorema 1.5.3, veamos que b es el supremo de estos conjuntos. Consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por teorema 1.3.15, tenemos que

$$b - \varepsilon < \frac{(b-\varepsilon)+b}{2} < b$$

    luego, si $x = \dfrac{(b-\varepsilon)+b}{2}$ tenemos que $x \in A_i$ con $i = 1, \ldots, 4$; puesto que $x < b$. Además, $b - \varepsilon < x$. Luego, $b = \sup A_i$ con $i = 1, \ldots, 4$. Notemos que si $\varepsilon \geq b - a$ cualquier $x \in A_i$ con $i = 1, \ldots, 4$ satisface la propiedad del teorema 1.5.3 para b como candidato a supremo.

    Como $-A_1 = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -b < x < -a\}$, entonces por lo demostrado en el párrafo anterior $\sup -A_1 = -a$, luego por lo demostrado en ejercicio resuelto 2 concluimos que $\inf A_1 = a$. Análogamente $\inf A_2 = \inf A_3 = \inf A_4 = a$.

    Veamos ahora que A_1 a pesar de tener ínfimo no tiene primer elemento. Si este existiera y fuera p, entonces, $p \in A_1$ y $p \leq x$; $x \in A_1$. Sin embargo, sabemos que siendo $a < p$ se tiene que $a < \dfrac{a+p}{2} < p$, y luego $\dfrac{a+p}{2} \in A_1$ y $\dfrac{a+p}{2} < p$. Pero esto es una contradicción con el hecho que p es el primer elemento de A_1. Por tanto, A_1 no tiene primer elemento.

    De modo análogo, A_3 no tiene primer elemento y A_1, A_2 no tienen último elemento.

14. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$, definimos $a + A = \{a + x \ : \ x \in A\}$. Demuestre que si A es acotado superiormente, entonces $a + A$ es acotado superiormente y $\sup(a + A) = a + \sup A$.

    Solución: Sea $u = \sup A$, entonces, $x \leq u$ para cualquier $x \in A$, y $a + x \leq a + u$. Por tanto, $a + u$ es una cota superior de $a + A$; por consiguiente, se tiene $\sup(a + A) \leq a + u$. Si v es cualquier cota superior del conjunto $a + A$, entonces $a + x \leq v$ para todo $x \in A$. Entonces,

$x \leq v - a$ para todo $x \in A$, lo cual implica que $u = \sup A \leq v - a$. Así $a + u \leq v$ y como $a + u$ es una cota superior de $a + A$, se concluye que

$$\sup(a + A) = a + u = a + \sup A.$$

Usando ejercicio resuelto 2, puede probarse una proposición análoga para ínfimos. En efecto,

$$\begin{aligned} \inf(a + A) &= -\sup[-(a + A)] \\ &= -\sup[-a + (-A)] \\ &= -[-a + \sup(-A)] \\ &= a - \sup(-A) \\ &= a + \inf A. \end{aligned}$$

Para que lo anterior tenga sentido, A debe ser un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente. Además debe demostrarse que $-(a + A) = -a + (-A)$, lo cual es inmediato.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre teorema 1.5.7.
2. Demuestre teorema 1.5.8.
3. Demuestre teorema 1.5.9.
4. Demuestre teorema 1.5.11.
5. Demuestre teorema 1.5.12.
6. Demuestre 13 de los ejercicios resueltos sin usar teorema 1.5.3.
7. Demuestre sin usar ejercicio resuelto 13 que:
   (a) $\sup[-5, 2) = 2$ y $\inf[-5, 2) = -5$.
   (b) $\sup\{x \in \mathbb{R} \,:\, -x^2 + 3x - 2 > 0\} = 2$ y $\inf\{x \in \mathbb{R} \,:\, -x^2 + 3x - 2 > 0\} = 1$.
   (c) $\sup\{-x^2 + 3x - 2 \,:\, x \in \mathbb{R}\} = \dfrac{1}{4}$.
8. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 3| < 4\}$
   (a) Encuentre cotas superiores e inferiores para A y su complemento A^c.
   (b) Encuentre el $\sup A$, $\inf A$, $\sup A^c$, $\inf A^c$ si es que existen.

Encuentre cotas superiores e inferiores para los siguientes conjuntos:

9. $\{x^2 + 1;\ -1 \leq x \leq 1\}$.
10. $\{x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}\}$.
11. $\left\{\dfrac{1}{x^2 + 1};\ -1 \leq x \leq 1\right\}$.

12. $\left\{\dfrac{1}{x^2+1};\ x \in \mathbb{R}\right\}$.
13. $\{1-x-x^2;\ -2 \leq x \leq 1\}$.
14. $\{x^2+x-1;\ x \in \mathbb{R}\}$.
15. $\{1-x-x^2;\ x \in \mathbb{R}\}$.
16. Si $x = 3b-a+2,\ y = 3a-b+7$ y los números a y b están acotados como sigue: $2,20 < a < 2,21\ \ ;\ \ 3,44 < b < 3,45$. Encuentre cotas superiores e inferiores para $x,\ y,\ x+y,\ x-y,\ xy,\ \dfrac{x}{y}$. Compare x e y.
17. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces consideremos los conjuntos: $A+B = \{a+b\ :\ a \in A,\, b \in B\}$.

    $\lambda A = \{\lambda a\ :\ a \in A\}$.

    $AB = \{ab\ :\ a \in A,\, b \in B\}$.

    (a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Muestre que si $\lambda \geq 0$, entonces $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ y $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$. Busque contraejemplos para mostrar que no se tienen tales igualdades cuando $\lambda < 0$.

    (b) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Demuestre que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ y $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. ¿Cuándo $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$ e $\inf(AB) = (\inf A)(\inf B)$? En tal caso demuestre que se satisfacen dichas igualdades.

    (c) Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $A \subset B$ y B acotado. Muestre que A es acotado y que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

    (d) Sean A, B subconjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}$. Muestre que

    $$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{y} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

    (e) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con recorrido acotado. Demuestre que si $A_0 \subset A$, entonces:

    $$\inf\{f(x)\ :\ x \in A\} \leq \inf\{f(x)\ :\ x \in A_0\} \leq \sup\{f(x)\ :\ x \in A_0\} \leq \sup\{f(x)\ :\ x \in A\}.$$

    (f) Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones con recorrido acotado. Demuestre que:

    $$\begin{aligned} \inf\{f(x)\ :\ x \in A\} + \inf\{g(x)\ :\ y \in A\} &\leq \inf\{f(x)+g(x)\ :\ x \in A\} \\ &\leq \inf\{f(x)\ :\ x \in A\} + \\ &\quad + \sup\{g(x)\ :\ y \in A\} \\ &\leq \sup\{f(x)+g(x)\ :\ x \in A\} \\ &\leq \sup\{f(x)\ :\ x \in A\} + \\ &\quad + \sup\{g(y)\ :\ y \in B\} \end{aligned}$$

18. Dados los números reales a, b, demuestre que:

    (a) $\sup\{a, b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

    (b) $\inf\{a, b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

1.6 Los números naturales

Si nos atenemos a los axiomas que caracterizan completamente a los números reales, vemos que ellos aseguran la existencia de sólo dos números concretos: el 0 y el 1. A partir de ellos, podemos formar $0,\, 1,\, 1+1,\, 1+1+1, \ldots$ y así sucesivamente, dando un símbolo adecuado para cada uno de ellos, surge el primer subconjunto particular de $\mathbb{R}$, los números naturales. Debido a esta misma simplicidad, históricamente fueron los primeros en aparecer, puesto que sirven para contar. En el siglo III a. C., los griegos ya se habían dado cuenta de ciertas propiedades de ellos, como por ejemplo que esta sucesión de números era susceptible de ser prolongada indefinidamente (propiedad arquimediana de los números) y que, además de trabajar con números particulares, también se podían establecer propiedades generales de ellos, en teoremas. En los Elementos de Euclides, se encuentran ya algunos teoremas sobre números naturales. Desde el punto de vista lógico, ellos pueden ser construidos a partir de la Teoría de Conjuntos. El lector interesado puede ver los libros de Halmos, Suppes, Landau.

En nuestro caso, adoptaremos la siguiente definición de números naturales.

Definición 1.6.1 Diremos que un subconjunto I de números reales es **inductivo** si

(i) $1 \in I$.

(ii) Si $k \in I$, entonces $k+1 \in I$.

Ejemplo 1.6.2 (a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ son conjuntos inductivos.

(b) $\mathbb{R} - \{10\}$ no es inductivo.

Observación 1.6.3 La propiedad (i) implica que todo conjunto inductivo es no vacío y la propiedad (ii) implica que todo conjunto inductivo es infinito.

Teorema 1.6.4 Si A, B son conjuntos inductivos, entonces $A \cap B$ es inductivo.

Demostración: Sean A, B conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Entonces por propiedad (i) de la definición 1.6.1, $1 \in A \cap B$. Si $k \in A \cap B$ entonces $k \in A$ y $k \in B$; como A y B son inductivos, entonces $k+1 \in A$ y $k+1 \in B$, por tanto $k+1 \in A \cap B$. Luego se tiene que $A \cap B$ es inductivo. ■

Definición 1.6.5 Llamaremos conjunto de los **números naturales**, $\mathbb{N}$, al menor conjunto inductivo de $\mathbb{R}$, es decir,

$$\mathbb{N} = \cap\{I : I \subset \mathbb{R},\, I \text{ es inductivo}\}.$$

Teorema 1.6.6 Principio de Inducción
Sea $k \in \mathbb{N}$ y $P(k)$ una propiedad satisfecha por k. Si se cumplen las siguientes afirmaciones:

(i) $P(1)$.

(ii) Para cada k, si $P(k)$ entonces $P(k+1)$.

Entonces, la propiedad $P(k)$ se satisface para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Demostración: Sea $I = \{k \in \mathbb{R} : P(k) \text{ se satisface}\}$. Veamos que I es inductivo.

- $1 \in I$, pues $P(1)$ se satisface por (i).
- Si $k \in I$ entonces $P(k)$ y por (ii) se tiene $P(k+1)$, por tanto $k+1 \in I$.

Como I es inductivo, por definición 1.6.5 $\mathbb{N} \subset I$, es decir, $P(k)$ se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.6.7 Principio del Buen Orden
$\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado: Todo subconjunto A no vacío de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

Demostración: Sea la proposición $P(n)$: "Si $A \subset \mathbb{N}$ tiene un elemento que es menor o igual que n, entonces A tiene primer elemento". Usaremos el Principio de Inducción para mostrar que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in A$, entonces 1 es el primer elemento. Por tanto, se cumple $P(1)$.
Supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, si un subconjunto A tiene un elemento menor o igual a n, entonces A tiene primer elemento. Debemos demostrar entonces que también se cumple $P(n+1)$. Para ello supondremos que un conjunto B tiene un elemento m menor o igual a $(n+1)$. En este caso tenemos dos posibilidades:

(a) existe $k \in B$, $k \leq n$.

(b) todo $k \in B$, $k > n$.

Si se tiene (a), entonces por la hipótesis de inducción $P(n)$ se cumple, y B tiene primer elemento.
Si se da la posibilidad (b), entonces para todo $k \in B$, $k \geq n+1$. Pero hemos supuesto que existe $m \in B$, $m \leq n+1$. Así $m \leq n+1 \leq k$, para todo $k \in B$ y $m \in B$, es decir, m es el primer elemento de B.
Ahora, si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, existe $n \in A$ y aplicando $P(n)$ podemos concluir que A tiene primer elemento ■

El Teorema 1.6.7, nos muestra que el Principio de Inducción implica el Principio del Buen Orden de $\mathbb{N}$, en verdad, ambos principios son equivalentes. Si el lector está interesado en la implicación recíproca, puede verla en el libro de M.Cotlar y C. Ratto.
El Principio de Inducción es el método más seguro, a veces el único, para demostrar propiedades de los números naturales. Existe un teorema paralelo a éste, que nos da la posibilidad de garantizar que ciertas funciones sobre los números naturales están bien fundamentadas, tal es el *Teorema de Recurrencia*, que vamos a enunciar para cultura de los lectores, pero que no demostraremos aquí.

Teorema 1.6.8 Teorema de Recurrencia
Si x es un número real y G una función sobre $\mathbb{R}$ con valores reales, entonces existe una única F tal que:

(i) F es una función sobre $\mathbb{N}$.

(ii) $F(1) = x$.

(iii) Para cada n, $F(n+1) = G(F(n))$.

Definición 1.6.9 Se llama **sucesión de números reales** a una función definida sobre $\mathbb{N}$ con valores en $\mathbb{R}$, es decir, una regla que pone en correspondencia de manera única los elementos de $\mathbb{N}$ con números reales.

Ejemplo 1.6.10 Una forma de definir sucesiones es usando el Teorema de Recurrencia.

a) Dados los números reales x, d, una progresión aritmética es la sucesión definida por recurrencia de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n + d \end{aligned}$$

b) Dados los números reales x, r, se define una **progresión geométrica** de la siguiente manera recursiva:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n \cdot r\,; \end{aligned}$$

c) La definición por recurrencia puede involucrar explícitamente a más de un término ya conocido, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 3a_{n-1}. \end{aligned}$$

Definición 1.6.11 Dado $x \in \mathbb{R}$, se define $x^1 = x$ y $x^{n+1} = x^n x$.

Observemos que esta operación es una aplicación del teorema 1.6.8. Tomando x fijo y $G(y) = yx$, el teorema nos asegura la existencia única de una función f sobre $\mathbb{N}$ tal que $f(1) = x$ y $f(n+1) = G(f(n)) = f(n)x$. Por convención $f(n)$ la escribimos como x^n. Las propiedades de esta función serán estudiadas en la sección 1.9.

La siguiente definición es otra aplicación del Teorema de Recurrencia.

Definición 1.6.12 Se define el símbolo $n!$ mediante el siguiente esquema recursivo:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ (n+1)! &= n!(n+1) \end{aligned}$$

Teorema 1.6.13 $\mathbb{N}$ **es cerrado para la suma**: si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $n + m \in \mathbb{N}$.

Demostración: Aplicaremos el Principio de Inducción sobre m y dejaremos fijo n.

- Como $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es inductivo $n + 1 \in \mathbb{N}$
- Supongamos que $m + n \in \mathbb{N}$, nuevamente por la Propiedad Inductiva de $\mathbb{N}$, $(m + n) + 1 \in \mathbb{N}$. Así podemos concluir que $\mathbb{N}$ es cerrado para la suma. ■

Teorema 1.6.14 $\mathbb{N}$ **es cerrado para la multiplicación**: Si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $nm \in \mathbb{N}$.

Demostración: Ejercicio.

Teorema 1.6.15 Dados dos números naturales m, n, si $m < n$, entonces existe un único natural d tal que $m + d = n$.

Demostración: Inducción sobre m.

- Si $1 < n$, entonces existe el antecesor de $n, n - 1$ tal que $1 + (n - 1) = n$; en este caso $d = (n - 1) \in \mathbb{N}$ sastisface la condición.
- Supongamos que la propiedad vale para m. Si $m + 1 < n$ y como $m < m + 1$, tenemos que $m < n$, entonces por hipótesis de inducción existe $d' \in \mathbb{N}$ tal que $m + d' = n$. Así $(m+1)+(d'-1) = n$. Por tanto $d = d' - 1$ satisface la condición , siempre que demostremos que $d \in \mathbb{N}$.Como m y n no son consecutivos $d' > 1$ o lo que es lo mismo $d \geq 2$, por tanto d' tiene un antecesor en $\mathbb{N}$; es decir, $d \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, por el Principio de Inducción hemos demostrado la existencia de tal d. Nos queda por demostrar la unicidad. Supongamos que existen d y $d^* \in \mathbb{N}, d \neq d^*$ tal que $m + d = n$ y $m + d^* = n$ entonces $m + d = m + d^*$ luego $d = d^*$. Por reducción al absurdo, se obtiene la unicidad de d. ■

Teorema 1.6.16 Para dos números naturales m, n $m < n$ si y sólo si existe un número natural d tal que $m + d = n$.

Demostración:

- Si $m < n$ entonces por teorema 1.6.15, existe un único $d \in \mathbb{N}$ tal que $m + d = n$.
- Recíprocamente, si $m + d = n$, como $d \in \mathbb{N}, d \geq 1$, entonces considerando m, n, d como números reales, $n - m = d \geq 1 > 0$ por definición del orden en $\mathbb{R}$, $m < n$. ■

El teorema 1.6.16 leído de otro modo nos justifica porqué la operación diferencia entre números naturales no es cerrada en $\mathbb{N}$. Esta es una debilidad de $\mathbb{N}$. Todas las propiedades de $\mathbb{N}$ vistas en los teoremas 1.6.13 al 1.6.16 son consecuencia de los Axiomas de Cuerpo y de Orden. Ahora veremos qué propiedades podemos extraer de $\mathbb{N}$ aplicando el Axioma del Supremo.

Teorema 1.6.17 Principio de Arquímedes
$\mathbb{N}$ no es acotado superiormente.

Demostración: Supongamos por contradicción que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente.
Por Axioma del Supremo, existe $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Por tanto $n \leq s$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando teorema 1.5.3 con $\varepsilon = 1$, tenemos la existencia de $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < n^*$, o lo que es lo mismo $s < n^* + 1$. Pero $n^* \in \mathbb{N}$, así $n^* + 1 \in \mathbb{N}$ y es mayor que el supremo de $\mathbb{N}$. Lo cual no puede ser, luego $\mathbb{N}$ no puede ser acotado superiormente. ■

Observación 1.6.18 Una forma equivalente de enunciar el Principio de Arquímedes es:
Dado un número real a, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$. Puesto que si no existiera tal n, tendríamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ $n \leq a$, y a sería una cota superior de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.6.19 Dado un número real pequeño, positivo, $\varepsilon < 1$, siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Demostración: Como $0 < \varepsilon < 1$ tenemos que $0 < \frac{1}{\varepsilon}$, luego por el Principio de Arquímedes existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Es decir, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ■

La propiedad arquimediana de los números reales, refleja algo así como el sentido común llevado al mundo de las magnitudes. Cuando se quiere medir el largo de un segmento llevando sobre él un segmento unidad, siempre es posible dejar un resto (si es que lo hay) inferior a la unidad. O lo que es lo mismo, es posible llevar el segmento unidad una cantidad suficiente de veces sobre el segmento a medir, de modo que se termina por sobrepasarlo. Esta situación con los símbolos que hemos introducido puede escribirse como: dado b (segmento a medir) y a (segmento unidad), siempre existe un número natural n tal que $n \cdot a > b$. Si en particular tenemos $a = 1$, entonces dado b siempre existe n tal que $n > b$. Son diferentes maneras de expresar una misma propiedad.

Con este principio, estamos excluyendo magnitudes infinitamente pequeñas (o grandes) en comparación con otras. Como veremos más adelante, esta propiedad juega un rol fundamental en nuestra aritmética y en la geometría euclidiana.

Por cierto existen situaciones no arquimedianas, la más simple de todas es tratar de medir un segmento con longitud positiva mediante puntos. Otras más complejas pueden verse en el libro de Fraenkel, página 123.

Teorema 1.6.20 Todo conjunto A de números naturales no vacío y acotado superiormente, tiene último elemento.

Demostración: Por ser A acotado, existe un número real x tal que $a \leq x$; para todo $a \in A$.
Por el principio de Arquímedes, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq N$; para todo $a \in A$. Así podemos definir el conjunto B de números naturales que son mayores que todo elemento de A. B es no vacío, pues $N \in B$, por tanto, por el principio del Buen Orden, B tiene un primer elemento p.
Luego $a < p$; para todo a en A. Como $p-1 < p$, $p-1 \in A$ pues si no $p-1 \in B$ y esto contradice que p es primer elemento de B. Por tanto, $p-1$ es el mayor elemento de A. ■

Definición 1.6.21 Dados a y b números naturales tales que $a \geq b$, se llama resto de dividir a por b y se escribe,$r(a,b)$, al menor número natural de la forma $a - n \cdot b$. Cuando $r(a,b) = 0$, se dice que b bf divide al número a, y en este caso escribimos $b \mid a$.

Teorema 1.6.22 Teorema del Resto
Dados dos números naturales a y b, el resto $r = r(a,b)$ de dividir a por b, tiene las siguientes propiedades:

(i) r es una combinación lineal de a y b, $r = a - b \cdot q$.

(ii) $0 \leq r < b$.

Demostración: Sea $C = \{z \in \mathbb{N} : z = a - b \cdot q\}, C \neq \emptyset$, (¿por qué?). Por principio del Buen Orden, sea r el primer elemento de C, por tanto:

$$r \in C, r \geq 0, r = a - b \cdot q \quad ; \text{así tenemos (i).}$$

Para (ii). Por contradicción supongamos que $r \geq b$, es decir, $r - b \geq 0$. Como $r = a - b \cdot q$, se tiene:

$$r - b = (a - b \cdot q) - b = a - b \cdot (q+1)$$

$\Longrightarrow$ $r - b \in C$ y como $r - b < r$. Esto contradice que r es el primer elemento de C.
Por tanto, debe tenerse que $r < b$. ■

Teorema 1.6.23 No existe ningún natural entre n y $n+1$. Es decir, $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no denso, y por tanto no continuo.

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n+1$. Como $n < m$, por teorema 1.6.15 existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $n + d_1 = m$. Análogamente, como $m < n+1, m + d_2 = n+1$, con $d_2 \in \mathbb{N}$. Por tanto, $n + d_1 + d_2 = n + 1$, por ley de cancelación $d_1 + d_2 = 1$, pero $d_1 \geq 1, d_2 \geq 1$ implica $d_1 + d_2 \geq 2$. Esta contradicción nos permite obtener la conclusión buscada. ■

Debido al teorema 1.6.23 se dice que los números naturales forman un conjunto discreto, pues la distancia en $\mathbb{R}$ entre dos números naturales consecutivos es 1. Si quisiéramos representar gráficamente $\mathbb{N}$, eligiendo arbitrariamente una unidad de longitud tendríamos:

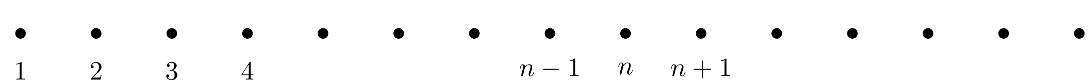


Figura 1.6.1: Números Naturales

Usaremos cuidadosamente los axiomas para llegar a la familiar recta que representa $\mathbb{R}$. Por tanto, parte de nuestro objetivo es mostrar cḿo se completa la recta.

Ejercicios resueltos

1. Calcule los siguientes productos:

   (a) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   (b) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

   (c) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

   Solución:

   (a) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1.$

   (b) De manera análoga se demuestra que

   $$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

   (c) Como $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}$,

   $$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

2. Demuestre usando el principio de inducción que $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

   Solución: Primeramente verificaremos la validez de la fórmula para $n=1$.

   El primer miembro se reduce a 1 como único elemento ; el segundo miembro queda como $\frac{1\cdot 2}{2}=1$.

   Supongamos como hipótesis de inducción que la fórmula vale para n y veamos si sigue valiendo para $n+1$.

   $$\begin{aligned} 1+2++3+\ldots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2} \end{aligned}$$

   Esto demuestra la validez de la fórmula para todo $n\in\mathbb{N}$.

3. Calcule la suma $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}$.

   Solución: Usando el ejercicio 2 tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2} &= \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\\ &= \frac{n(n+1)}{n^2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

4. Encuentre cotas inferiores y superiores del conjunto $\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2};\ \ n\in\mathbb{N}\right\}$.

   Solución: Usando el ejercicio anterior y que $0<\frac{1}{n}\leq 1$, podemos decir que 1 es una cota superior y $\frac{1}{2}$ una cota inferior del conjunto.

5. (a) Demuestre usando el princicio de inducción que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) Deduzca una fórmula para la suma $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2$.

   (c) Calcule la suma de los cuadrados de los cuatro primeros dígitos impares.

   Solución:

   (a) Para $n=1$ el primer miembro de la igualdad se reduce a $1^2=1$, el segundo miembro vale $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$. Por tanto, la fórmula se cumple para $n=1$.
   Supongamos como hipótesis de inducción que la fórmula vale para n y demostremos su validez para $n+1$.

$$\begin{aligned}1^2+2^2++3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]\\ &= \frac{(n+1)}{6}\left[2n^2+7n+6\right]\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6}\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2 &= 1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2-(2^2+4^2+\ldots+(2n)^2)\\ &= 1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2-4(1^2+2^2+\ldots+n^2)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{2n+1}{6}\left[4n^2+10n+6\right]\\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.\end{aligned}$$

(c) Aplicamos la fórmula recién encontrada con $n = 4$, lo que nos da $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2 = \dfrac{5\cdot 9\cdot 11}{3} = 165$.

6. Usando la descomposición $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, calcule la suma
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Solución:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

7. Calcule la suma
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}.$$

Solución: Para calcular esta suma seguiremos un procedimiento similar al del ejercicio anterior, es decir, descompondremos la fracción $\dfrac{1}{k(k+1)(k+3)}$ en suma de fracciones simples. Siguiendo el método mostrado en los ejercicios de la sección 1.2 obtenemos que:
$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1}{3k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{6(k+3)}.$$
Por tanto la suma puede escribirse como:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{3\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{6\cdot 4}\\
&+ \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{6\cdot 5}\\
&+ \frac{1}{3\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{6\cdot 6}\\
&+ \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7}\\
&+ \ldots\\
&+ \frac{1}{3\cdot n} - \frac{1}{2\cdot (n+1)} + \frac{1}{6\cdot (n+3)}.
\end{aligned}$$
Como $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$, vemos que el $\dfrac{1}{6}$ que aparece en la primera línea se anula con la suma de $-\dfrac{1}{2}$ de la tercera línea con el $\dfrac{1}{3}$ de la cuarta línea ; en este caso todas estas fracciones están multiplicadas por un cuarto; de la misma manera el último factor de la segunda línea se anula con la suma d el segundo sumando de la cuarta línea con el primer sumando de la quinta línea . Inductivamente esto se repite quedando sólo algunos factores del comienzo y del final de la suma total. Por tanto,
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{3\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+3)}\\
&= \frac{7}{36} - \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)}
\end{aligned}$$

8. (a) Demuestre que

$$\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)\dots(p+k) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)}{k+2}.$$

(b) Demuestre que

$$x^3 = x(x+1)(x+2) - 3x(x+1) + 1, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}.$$

(c) Use los dos items anteriores para calcular

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

Compare con la fórmula obtenida en el ejercicio 1.

Solución:

(a) Aplicaremos inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces

$$\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)\dots(p+k) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (1+k) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (1+k)\frac{(1+k+1)}{k+2}.$$

Por tanto, la fórmula vale cuando $n = 1$.
Supongamos que la fórmula vale para n, y veamos que sucede para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2)\dots(p+k) &= \left[\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2)\dots(p+k)\right] + \\
&+ (n+1)(n+2)(n+3)\dots\dots(n+1+k) \\
&= \frac{n(n+1)\dots(n+k+1)}{k+2} + (n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+1+k) \\
&= \frac{n(n+1)\dots(n+k+1) + (n+1)(n+2)\dots(n+1+k)(k+2)}{k+2} \\
&= \frac{(n+1)\dots(n+k+1)[n+k+2]}{k+2} \\
&= \frac{(n+1)\dots(n+k+1)[(n+1)+(k+1)]}{k+2}
\end{aligned}$$

Así obtenemos la validez para $n+1$, y por el principio de inducción, el resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es un simple cálculo algebraico.

(c) Usando la escritura del item anterior para $x = 1, 2, 3, \dots, n$; obtenemos:

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \\
2^3 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \\
3^3 &= 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \\
\dots &= \dots \\
n^3 &= n \cdot (n+1) \cdot (n+2) - 3 \cdot n \cdot (n+1) + +n
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades nos da:

$$\sum_{p=1}^{n} p^3 = \sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) - 3\sum_{p=1}^{n} p(p+1) + \sum_{p=1}^{n} p.$$

Aplicando la fórmula del primer item con $k = 2$, $k = 1$ y la fórmula del ejercicio 2, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} p^3 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - 4n(n+1)(n+2) + 2n(n+1)}{4} \\
&= n(n+1)\frac{(n+2)(n+3) - 4(n+2) + 2}{4} \\
&= n(n+1)\frac{n^2+n}{4} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

9. Demuestre que $\inf\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} = 0$.

   Solución:: 0 es cota inferior del conjunto pues, $0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $I > 0$, entonces por el teorema 1.6.19 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < I$. Lo cual es una contradicción con la definición de I. Por tanto, $I = 0$.

10. Demuestre que si $x, z \in \mathbb{R}^+$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > z$.

    Solución:: Como $x, z \in \mathbb{R}^+$ entonces $\frac{z}{x} \in \mathbb{R}^+$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{z}{x} < n$. Luego $z < nx$.

    Podemos observar que esta es una de las formas de enunciar el principio de Arquímedes, como ya fue comentado anteriormente.

11. Dado $x \in \mathbb{R}^+$, demuestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$.

    Solución:: Por el principio de Arquímedes existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m$. Por esta razón el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} \ : \ x < m\}$ es no vacío. Sea n el primer elemento de A, entonces $n - 1 \leq y < n$.

    Este resultado permite definir el símbolo $[x]$ llamado **parte entera de un número real**.

12. Diremos que un número natural es **primo** si es divisible sólo por uno y por sí mismo. Demuestre que si $n \neq 1$ es un número natural que no es primo, entonces existe un primo que lo divide.

    Solución:: Sea n un número natural distinto de 1, y definamos el conjunto

    $$A = \{ \text{ divisores de } n \text{ distintos de } 1 \ \}.$$

    Luego $A \neq \emptyset$, pues $n \in A$ y además n no es primo. Entonces, por el principio del Buen Orden de $\mathbb{N}$, A tiene un primer elemento. Sea p tal primer elemento. Demostraremos que p es primo.

    Si p no es primo, entonces tiene un divisor distinto de 1 y de sí mismo. Sea éste d. Luego, $d|p$ y se sabe que $p|n$. Se sigue que $d|n$, lo que implica que $d \in A$ y $d < p$. Lo anterior es una contradicción por el hecho que p es el primer elemento de A.

13. Demuestre que los números naturales primos son infinitos.

Solución:: Supongamos que los números naturales primos son finitos. Sean $p_1, \ldots, p_k$ todos los números primos y consideremos

$$z = \prod_{i=1}^{k} p_i + 1.$$

z no es primo, pues z es mayor que todos los p_i con $i = 1, \ldots, k$. Luego, hay un primo que lo divide por ejercicio resuelto 2. Sea este p_{i_0} para algún $1 \leq i_0 \leq k$. Luego $p_{i_0}|z$ y además $p_{i_0}|(\prod_{i=1}^{k} p_i)$, lo que implica que p_{i_0} divide a $z - (\prod_{i=1}^{k} p_i) = 1$, es decir, p_{i_0} divide a 1. Lo anterior es una contradicción, por tanto los primos deben ser infinitos.

14. Demuestre la desigualdad de Bernoulli:

    Si $x > -1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces
    $$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

    Solución:: Usemos inducción sobre n. Para $n = 1$ se tiene que $(1+x)^1 \geq 1 + x$. Hipótesis de inducción:

    $$(1+x)^k \geq 1 + kx,$$

    demostraremos que $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$.

    $$\begin{array}{rcl} (1+x)^{k+1} & = & (1+x)^k(1+x) \\ & \geq & (1+kx)(1+x) \\ & = & 1 + x + kx + kx^2 \\ & = & 1 + (k+1)x + kx^2 \\ & \geq & 1 + (k+1)x. \end{array}$$

    Así se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

15. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq n$. Definimos:

    $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

    Demuestre que:

    (i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

    (ii) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

    Solución:: La propiedad (i) es inmediata. Demostremos (ii),

    $$\begin{array}{rcl} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} & = & \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\ & = & \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ & = & \dfrac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!n - n!k + n! + n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!n + n!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}
\end{aligned}$$

De donde se tiene la igualdad deseada.

16. Demuestre el teorema del Binomio de Newton:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Solución:: Aplicando inducción sobre n, tenemos que para $n = 1$, $(a+b)^1 = a + b$, por otro lado

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

Hipótesis de inducción:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Consideremos:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&= (a+b)^n a + (a+b)^n b \\
&= (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k) a + (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k) b \\
&= (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k) + (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}) \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Desarrollando el tercer sumando:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

y haciendo $t = k + 1$, esta expresión se escribe como:

$$\sum_{t=1}^{n+1}\binom{n}{t-1}a^{n+1-t}b^t,$$

y como t es una variable muda, esto es no importa como se llame, podemos escribir:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k.$$

Luego (*) queda:

$$\binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k=$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k+\binom{n}{n}a^0b^{n+1}\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}[\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k]+\binom{n}{n}a^0b^{n+1}\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}]a^{n+1-k}b^k+\binom{n}{n}a^0b^{n+1}\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k+\binom{n}{n}a^0b^{n+1} \quad (**)
\end{aligned}$$

Como

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

tenemos que (**) queda:

$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k+\binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.$$

Como queríamos demostrar.

17. Dado n demuestre que $5^{2(n+1)}-24n-25$ es divisible por 576.

Solución:: para $n=1$:

$$5^{2(1+1)}-24\cdot 1-25=5^4-24-25=625-49=576.$$

Por tanto, para $n=1$ se verifica que $5^{2(n+1)}-24n-25$ es divisible por 576.

Hipótesis de inducción: $5^{2(k+1)}-24k-25$ es divisible por 576.

Luego:

$$\begin{aligned}
5^{2(k+2)} - 24(k+1) - 25 &= 5^{2(k+1)+2} - 24k - 24 - 25 \\
&= 5^{2(k+1)}5^2 - 24k - 24 - 25 \\
&= 5^{2(k+1)}(24+1) - 24k - 24 - 25 \\
&= 24 \cdot 5^{2(k+1)} + 5^{2(k+1)} - 24k - 24 - 25 \\
&= 24[5^{2(k+1)} - 1] + 5^{2(k+1)} - 24k - 25. \quad (*)
\end{aligned}$$

Como por hipótesis de inducción se sabe que $5^{2(k+1)} - 24k - 25$ es divisible por 576, basta probar que $24[5^{2(k+1)} - 1]$ es divisible por 576, lo cual haremos con una nueva inducción sobre k.

Para $k = 1$ se tiene que $24[5^{2(1+1)} - 1] = 24 \cdot 5^4 - 24 = 14976 = 26 \cdot 576$. Supongamos que $24[5^{2(k+1)} - 1]$ es divisible por 576. Luego,

$$\begin{aligned}
24[5^{2(k+2)} - 1] &= 24 \cdot 5^{2(k+2)} - 24 \\
&= 24 \cdot 5^{2(k+1)} \cdot 5^2 - 24 \\
&= 24 \cdot 5^{2(k+1)}(24+1) - 24 \\
&= 24^2 5^{2(k+1)} + 24 \cdot 5^{2(k+1)} - 24 \\
&= 24^2 25^2 5^{2k} + 24 \cdot 5^{2(k+1)} - 24 \\
&= 360000 \cdot 5^{2k} + 24 \cdot 5^{2(k+1)} - 24.
\end{aligned}$$

Luego, por hipótesis de inducción se tiene que $24 \cdot 5^{2(k+1)} - 24$ es divisible por 576 y además como $360000 = 576 \cdot 576$, así tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$: $24[5^{2(k+1)} - 1]$ es divisible por 576; lo que implica que (*), esto es $24[5^{2(k+1)} - 1] + 5^{2(k+1)} - 24k - 25$ es divisible por 576.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que:
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

2. (a) Demuestre que la suma de los cubos de los n primeros números impares es $n^2(2n^2 - 1)$.

   (b) Calcule la suma de los cubos de los dígitos impares.

3. Calcule la suma
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

4. Calcule la suma
$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

5. Demuestre que:

   (a) Si $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ entonces
$$(x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K \quad \text{y} \quad (x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K,$$
   donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x.

(b) Si $x < 0$, $n \in \mathbb{N}$ impar, $0 < \varepsilon \leq 1$, entonces

$$(x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K \quad \text{y} \quad (x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K,$$

donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x.

6. Demuestre que:

(a)
$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

(b)
$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-2}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}.$$

7. Demuestre que:
$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{m} = 2^n.$$

8. Demuestre que:
$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{m} = 0.$$

9. Demuestre, usando inducción, que si un conjunto A tiene n elementos, entonces el conjunto $\mathcal{P}(A)$ que también suele denotarse 2^A, tiene 2^n elementos.

10. Demuestre que la suma de los ángulos de un polígono de n lados es igual a $(n-2)\pi$.

11. Dados a y $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, demuestre que:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)[\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}]$$

12. Definición: Un número natural se dice **par** si él se escribe como $n = 2k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Un número natural n se dice **impar** si n se escribe como $n = 2k+1$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

(i) n^2 es par si y sólo si n es par.

(ii) n^2 es impar si y sólo si n es impar.

1.7 Los números enteros

Aritméticamente el conjunto de los números naturales es insuficiente, entre otras cosas, por no ser cerrado para la diferencia al no contener los inversos aditivos de sus elementos. Por ello, un primer paso para remediar sus consecuencias es agregar a $\mathbb{N}$ sus inversos aditivos, obteniendo el conjunto $\mathbb{Z}$ de los **número enteros.**

Definición 1.7.1 $\mathbb{Z} = \{p \in \mathbb{R} \,:\, (p \in \mathbb{N}) \;\vee (-p \in \mathbb{N}) \;\vee\; (p = 0)\}$.

Teorema 1.7.2 $\mathbb{Z}$ es cerrado para la suma, multiplicación y diferencia.

Teorema 1.7.3 En $\mathbb{Z}$ la multiplicación no tiene elemento inverso.

Teorema 1.7.4 $\mathbb{Z}$ es no denso y, por tanto, no continuo.

Una imagen gráfica de $\mathbb{Z}$ es la figura 1.7.1.

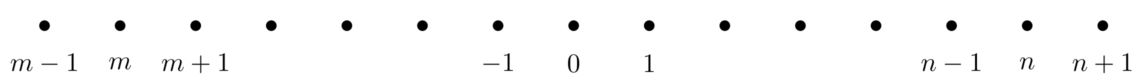


Figura 1.7.1: Números Enteros

Teorema 1.7.5 $\mathbb{Z}$ no es bien ordenado.

Definición 1.7.6 Dados a y $b \in \mathbb{Z}$ decimos que a **divide** b o que a **es divisor de** b o que b es múltiplo de a si existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot m = b$, lo que se escribe $a \mid b$.

Teorema 1.7.7 La relación **ser divisor de** tiene las siguientes propiedades:

(i) Es transitiva.

(ii) Si c divide a y c divide b, entonces c divide $(a \pm b)$.

(iii) Si a divide b, entonces $|a| \leq |b|$.

(iv) Si a divide b y b divide a, entonces $|a| = |b|$.

Demostración:

(i) Supongamos que a divide c y b divide c entonces $a \cdot m = b$ y $b \cdot n = c$. Reemplazando la primera igualdad en la segunda, se tiene $a \cdot (m \cdot n) = c$; como $m \cdot n \in \mathbb{Z}$, a divide c.

(ii) Supongamos que c divide a y c divide b, entonces $c \cdot m = a$ y $c \cdot n = b$; sumando y restando ambas igualdades, obtenemos $a \pm b = (m \pm n) \cdot c = q \cdot c$; donde $q = m \pm n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Supongamos que a divide b; entonces $a \cdot m = b$. Por tanto, $|a \cdot m| = |b|$ y como $|a \cdot m| = |a| \cdot |m|$, se tiene $|a| \cdot |m| = |b|$ con $|m| \geq 1$, por lo cual $|a| \leq |b|$.

(iv) Supongamos que a divide b y b divide a; entonces, $a \cdot m = b$ y $b \cdot n = a$, por lo que podemos escribir $a \cdot (m \cdot n) = a$. Así, $m \cdot n = 1$ lo que a su vez da dos posibilidades: $m = n = 1$ ó $m = n = -1$. Por tanto, $a = \pm b$, lo que implica $|a| = |b|$. ■

Definición 1.7.8 Llamaremos una **combinación lineal** de los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a toda expresión del tipo: $(m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n)$, donde los números m_i con $i = 1, \ldots, n$ son enteros.

Teorema 1.7.9 Todo divisor común de varios números enteros es divisor de cualquier combinación lineal de ellos.

Demostración: Sean $a_1, \ldots, a_n$ números enteros y d un divisor común de todos ellos. Consideremos una combinación lineal de la forma $m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n$.
Por hipótesis d divide a_i, para todo $i = 1, \ldots, n$. Por definición de divisor tenemos a_i divide $m_i \cdot a_i$; para todo $i = 1, \ldots, n$; luego, por transitividad se tiene que:
d divide $m_i \cdot a_i$; para todo $i = 1, \ldots, n$ y usando la propiedad (ii) del teorema 1.7.7 anterior, se concluye que d divide $(m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n)$. ■

Con el Teorema de Resto y el Principio del Buen Orden de $\mathbb{N}$, entre otras herramientas, se puede demostrar la existencia del Máximo Común Divisor y del Mínimo Común Múltiplo de una cantidad finita de enteros. Otro tema de interés es el estudio de los misteriosos números primos, que juegan el rol de entes atómicos (indivisibles) dentro de $\mathbb{Z}$. Para quien se interese en estos temas, se recomiendan los libros de Vinogradov, Leveque, Petafrezzo.

Ejercicios resueltos

1. Dado $x \in \mathbb{R}$, la parte entera de x, $[x]$ se define como el mayor entero menor o igual a x. La existencia de $[x]$ está justificada por el ejercicio resuelto 3 de la sección 1.6. Determine si es verdadera cada una de las siguientes afirmaciones. Si lo es, demuéstrelo, o si es falso, muestre un contraejemplo:

   (a) $[x + y] = [x] + [y]$.

   (b) $[x \cdot y] = [x] \cdot [y]$.

   Solución:

   Ambas afirmaciones son falsas como lo demuestran los siguientes ejemplos.

   (a) Si $x = 0,17$, $y = -0,17$ tenemos $[x] = 0$, $[y] = -1$, $[x + y] = [0] = 0 \neq [x] + [y] = -1$.

   (b) Si $x = 10$, $y = -0,17$ tenemos $[x] = 10$, $[y] = -1$, $[xy] = [-1,17] = -2 \neq [x][y] = -10$.

2. ¿ Qué puede decir de x sabiendo que:

   (a) $[x] = -2$,

   (b) $[x + 2] = 0$,

   (c) $[2x] = 3$,

   (d) $\left[\frac{x}{3}\right] = -1$, ?

   Solución:

   (a) $[x] = -2$ implica $-2 \leq x < -1$.

   (b) $[x + 2] = 0$ implica $0 \leq x + 2 < 1$. Por tanto, $-2 \leq x < -1$.

   (c) Si $[2x] = 3$, entonces $3 \leq 2x < 4$. Así, $\frac{3}{2} \leq x < 2$.

   (d) $\left[\frac{x}{3}\right] = -1$ implica $-1 \leq \frac{x}{3} < 0$. Por tanto, $-3 \leq x < 0$.

3. Si $\operatorname{mcd}(x, y)$ denota el máximo común divisor entre x e y, demuestre que dados $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $b = aq + r$, $\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(a, r)$.

   Solución: Si $d = \operatorname{mcd}(a, b)$, entonces $d|a$ y $d|b$, luego $d|(b - aq)$, es decir, $d|r$ y $d|a$.Por otra parte, si z es un entero tal que $z|a$ y $z|r$, se tiene que $z|(aq + r)$. Por lo tanto, $z|a$ y $z|b$, lo que implica que $|z| \leq d$, pues $d = \operatorname{mcd}(a, b)$. En consecuencia, $d = \operatorname{mcd}(a, r)$.

4. Usando el algoritmo de la división o Teorema del Resto, encuentre el $\operatorname{mcd}(414, 943)$.

   Solución: Llamemos $a = 414$ y $b = 943$, se tiene por divisiones sucesivas que:

$$\begin{array}{lrl}
(1) & 943 = 2 \cdot 414 + 115, & \text{con } r_1 = 115 \\
(2) & 414 = 3 \cdot 115 + 69, & \text{con } r_2 = 69 \\
(3) & 115 = 1 \cdot 69 + 46, & \text{con } r_3 = 46 \\
(4) & 69 = 1 \cdot 46 + 23, & \text{con } r_4 = 23 \\
 & 46 = 2 \cdot 23 & .
\end{array}$$

   Luego como

$$\begin{aligned}
\operatorname{mcd}(a, b) &= \operatorname{mcd}(a, r_1) \\
&= \operatorname{mcd}(r_1, r_2) \\
&= \operatorname{mcd}(r_2, r_3) \\
&= \operatorname{mcd}(r_3, r_4)
\end{aligned}$$

   pero $\operatorname{mcd}(46, 23) = 23$ se tiene que $\operatorname{mcd}(414, 943) = 23$. Observar que despejando sucesivamente en el desarrollo de las divisiones anteriores se tiene $23 = 69 - 46$ de igualdad (4), $23 = 69 - (115 - 69)$ de igualdad (3). Por lo tanto, $23 = 2 \cdot 69 - 115$, $23 = 2 \cdot (414 - 3 \cdot 115) - 115$ de igualdad (2). Así $23 = 2 \cdot 414 - 7 \cdot 115$, $23 = 2 \cdot 414 - 7(943 - \cdot 414)$ de donde la igualdad $23 = \operatorname{mcd}(414, 943) = 414 \cdot 16 + 943(-7)$.

5. Demuestre que un número natural n es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

   Solución: Sea $p \in \mathbb{N}$ y $p = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n$ su expresión decimal, esto es, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los dígitos de p donde a_0 es la cifra de las unidades, a_1 es la cifra de las decenas, a_2 es la cifra de las centenas, etc. Se tiene:

$$\begin{aligned}
p &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n \\
&= a_0 + [a_1(10 - 1) + a_1] + [a_2(10^2 - 1) + a_2] + \ldots + [a_n(10^n - 1) + a_n] \\
&= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + [a_1(10 - 1) + \ldots + a_n(10^n - 1)].
\end{aligned}$$

   Luego, como $a_1(10 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \ldots + a_n(10^n - 1)$ es divisible por 3, según ejercicio propuesto 5, entonces se cumple que p es divisible por 3 si y sólo si la suma de los dígitos es divisible por 3, usando teorema 1.7.7(ii).

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n - [a_1(10 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \ldots + a_n(10^n - 1)].$$

6. Definición: Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $ab \neq 0$, una ecuación de la forma: $ax + by = c$, donde $x, y \in \mathbb{Z}$, se llama **ecuación diofántica**, en honor a Diofanto de Alejandría, matemático del siglo III d.C.

Dada la ecuación diofántica:

$$ax + by = c, \tag{E}$$

demuestre que:

(a) La ecuación (E) tiene solución en $\mathbb{Z}$ si y sólo si $\operatorname{mcd}(a, b)$ divide a c.

(b) Si $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ es una solución particular de la ecuación (E), entonces la solución general está dada por

$$x = x_0 + kb,$$
$$y = y_0 - ka.$$

Solución:

(a) Supongamos que la ecuación (E) tiene una solución , es decir, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = c$ y sea $d = \operatorname{mcd}(a, b)$ luego $d|a$ y $d|b$ por teorema 1.7.9 $d|c$. Entonces, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = d \cdot k$; usando Teorema de Bezout (ejercicio propuesto 1.7.9) se tiene que existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = d$ multiplicando por $k \in \mathbb{Z}$, se tiene $a(xk) + b(yk) = dk = c$. Así, la ecuación (E) tiene solución.

(b) Sea x_0, y_0 es una solución particular en $\mathbb{Z}$, de (E) esto es, $ax_0 + by_0 = c$ y sea $k \in \mathbb{Z}$. Luego $x = x_0 + kb$, $y = y_0 - ka$ es solución de (E). En efecto:

$$\begin{aligned} ax + by &= a(x_0 + kb) + b(y_0 - ka) \\ &= ax_0 + by_0 + k(ab - ab) \\ &= ax_0 + by_0 \\ &= c \end{aligned}$$

pues x_0, y_0 es solución particular de (E). Sea x, y otra solución de (E), entonces: $ax_0 + by_0 = c$ y $ax + by = c$, por tanto:

$$ax_0 + by_0 = ax + by$$

o lo que es lo mismo

$$a(x_0 - x) = b(y - y_0)$$

dividiendo por d se tiene

$$\frac{a}{d}(x_0 - x) = \frac{b}{d}(y - y_0).$$

Si $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ entonces, usando ejercicio propuesto 4 (h), tenemos que $\operatorname{mcd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$, además $\frac{a}{d}|(y - y_0)$ y $\frac{b}{d}|(x_0 - x)$. De esto se deduce la existencia de $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 - x = \frac{b}{d}t$ y $y - y_0 = \frac{a}{d}t$ (es el mismo t ¿por qué?) haciendo $k = \frac{t}{d}$ se tiene lo deseado.

7. Resuelva en $\mathbb{Z}$ la ecuación $48x + 7y = 5$.

   Solución: Se tiene que $x_0 = 2$ y $y_0 = -13$ son soluciones particulares de la ecuación, pues $96 - 91 = 5$, luego la solución general es $x = 2 + 7k$, $y = -13 - 48k$.

8. ¿De cuántas maneras pueden repartirse 10.000 pesos en billetes de 1.000 y de 500 ?

   Solución: Sea x la cantidad de billetes de 1.000 e y la cantidad de billetes de 500. Entonces para responder a la pregunta debemos resolver la ecuación diofántica:

$$1000x + 500y = 10.000,$$

que puede ser reducida a $2x+y=20$. Según el ejercicio 6, basta tener una solución particular para encontrar todas las soluciones. Como $x=5,\ \ y=10$ es una solución, las demás se encuentran siguiendo la fórmula $x=5+k,\ \ \ y=10-2k$, variando $k\in Z$. Pero, dada la naturaleza concreta del problema las soluciones que sirven son para $k\in\{-5,-4,\ldots,0,4,5\}$. Es decir, existen 11 maneras diferentes de solucionar el problema.

Ejercicios propuestos

1. Demostrar el teorema 1.7.2.
2. Demostrar el teorema 1.7.3.
3. Demostrar el teorema 1.7.4.
4. Demostrar el teorema 1.7.5.
5. Si $[x]=-4,\ \ [y]=1$. Dé cotas superiores e inferiores para $x+y,\ x-y,\ xy$.
6. (a) Sea x un número real positivo. Demuestre que $n=[x+0.5]$ es entre todos los enteros el más cercano a x.
   (b) ¿Sigue valiendo el resultado anterior cuando x es negativo ?
7. Pruebe que dado $n\in\mathbb{N}$, 10^n-1 es divisible por 3.
8. Encuentre un algoritmo para indicar cuándo un número es divisible por 11.
9. Demuestre el teorema de Bezout (1730-1783): Dados $a,b\in\mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{mcd}(a,b)=d$, entonces existen $x,y\in\mathbb{Z}$ tales que $ax+by=d$.
10. Demuestre que:
    Dados $a,b\in\mathbb{Z}$
    (a) existe $x,y\in\mathbb{Z}$ tal que $ax+by=1$ si y sólo si $\operatorname{mcd}(a,b)=1$.
    (b) Si $b|c$ y $\operatorname{mcd}(a,c)=1$, entonces $\operatorname{mcd}(a,b)=1$.
    (c) Si $b|c$, entonces $\operatorname{mcd}(a,b)=\operatorname{mcd}(a+c,b)$.
    (d) Si $\operatorname{mcd}(a,c)=1$, entonces $\operatorname{mcd}(a,b)=\operatorname{mcd}(a,bc)$.
    (e) Si $\operatorname{mcd}(a,bc)=1$, entonces $\operatorname{mcd}(a,b)=1$ y $\operatorname{mcd}(a,c)=1$.
    (f) Si $\operatorname{mcd}(a,b)=1$, entonces $\operatorname{mcd}(a^k,b^n)=1$ para cualquier $k.n\in\mathbb{N}$.
    (g) Si $\operatorname{mcd}(b,c)=1$, entonces $\operatorname{mcd}(a,bc)=\operatorname{mcd}(a,b)\operatorname{mcd}(a,c)$.
    (h) Si $\operatorname{mcd}(a,b)=c \implies \operatorname{mcd}(\frac{a}{c},\frac{b}{c})=1$.
11. Encuentre las soluciones enteras de:
    (a) $21x-12y=72$.
    (b) $44x+66y=11$.
    (c) $13x-7y=21$.
12. Pruebe que la ecuación $15x^2-7y^2=9$ no tiene soluciones enteras.
13. Demuestre que todo número impar es la diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos.
14. Demuestre que el producto de cuatro enteros consecutivos aumentado en 1 es el cuadrado de un entero.

15. Sean a y b dos enteros: demuestre que

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b)+b^4$$

es el cuadrado de un entero.

1.8 Los números racionales

Las fracciones aparecen naturalmente de una interacción muy concreta entre la aritmética y la geometría, pues para *medir* la longitud de un objeto se debe *contar* las veces que la unidad de longitud elegida está contenida en el objeto. Pero en este proceso de medición puede ocurrir que la unidad no esté contenida una cantidad entera de veces en la magnitud a medir, por lo que, para tener una idea más precisa de la medida buscada, se hace necesario fraccionar la unidad.

Desde un punto de vista más abstracto hemos visto que en $\mathbb{Z}$ podemos resolver toda ecuación de la forma $x+m=n$; con $m,n\in\mathbb{Z}$. La situación cambia radicalmente agregándole un coeficiente entero a x. En virtud de la divisibilidad en $\mathbb{Z}$ la ecuación $p\cdot x+m=n$ con $m,n,p\in\mathbb{Z}, p\neq 0, |p|\neq 1$ no siempre tiene solución en $\mathbb{Z}$, lo cual es una buena razón para ampliar $\mathbb{Z}$ de modo que toda ecuación de primer grado con coeficientes enteros tenga una solución en el nuevo conjunto. Así aparece el conjunto de los números racionales denotado por $\mathbb{Q}$, haciendo alusión a la palabra inglesa *quotient*, y que contiene todos los cuocientes de números enteros.

Definición 1.8.1 $\mathbb{Q}=\{r\in\mathbb{R}\ :\ r=\dfrac{m}{n}\ ;\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\}$

Observemos que un número racional puede ser escrito de infinitas formas distintas, por ejemplo, $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{27}{71}=\dfrac{-13}{-39}$, etc.

De la definición se deduce fácilmente que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$

Teorema 1.8.2 $\mathbb{Q}$ es cerrado para la suma, multiplicación, diferencia y división.

Demostración:
$\mathbb{Q}$ es cerrado para la suma y la diferencia. Sean r_1, r_2 números racionales, entonces:

$$\begin{aligned} r_1+r_2 &= \frac{p_1}{q_1}\pm\frac{p_2}{q_2}\ ;\ p_1,p_2\in\mathbb{Z};\ q_1,q_2\in\mathbb{N}\ (\text{ definición de } \mathbb{Q}\ )\\ &= \frac{p_1q_2\pm p_2q_1}{q_1q_2}\ ;\quad (\text{teorema } 1.2.14)\\ &= \frac{p}{q}\ ;\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego, $r_1+r_2\in\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}$ es cerrado para el producto:

$$\begin{aligned} r_1r_2 &= \frac{p_1}{q_1}\frac{p_2}{q_2}\ ;\ p_1,p_2\in\mathbb{Z};\ q_1,q_2\in\mathbb{N}\ (\text{ definición de } \mathbb{Q}\ )\\ &= \frac{p_1p_2}{q_1q_2}\ ;\quad (\text{teorema } 1.2.14)\\ &= \frac{p}{q}\ ;\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así, $r_1r_2\in\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}$ es cerrado para la división; la demostración es similar a la anterior. ■

Teorema 1.8.3 Si $m,n,p\in\mathbb{Z}, p\neq 0$, entonces la ecuación $p\cdot x+m=n$ tiene una única solución en $\mathbb{Q}$.

Demostración: Consideremos la ecuación $px+m=n$, entonces $px=n-m$. Como $p\neq 0$, existe p^{-1}. Por ser p número entero $p^{-1}=\dfrac{1}{p}\in\mathbb{Q}$. Por tanto, $x=\dfrac{n-m}{p}$. Como $n-m\in\mathbb{Q}$, $p\in\mathbb{Q}$, por teorema 1.8.2, $x\in\mathbb{Q}$. ■

Teorema 1.8.4 (i) $\mathbb{Q}$ es denso: si $r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $r_1 < q < r_2$.

(ii) $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe un racional r tal que $x < r < y$.

Demostración:

(i) Usando teorema 1.3.15, para $r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2$ existe $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2} \in \mathbb{Q}$, por Teorema 1.8.2, tal que $r_1 < r < r_2$. Por definición 1.3.16, $\mathbb{Q}$ es denso.

(ii) Sean $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$. Supongamos que $x > 0$. Como $y - x > 0$ entonces, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe un número natural m tal que $0 < \dfrac{1}{m} < y - x$, y existe un número natural k tal que $mx < k$.

Consideremos el conjunto $A = \{k \in \mathbb{N}\ :\ x < \dfrac{k}{m}\}$ que es no vacío, por lo demostrado anteriormente. Usando la propiedad de Buen Orden de $\mathbb{N}$, A tiene primer elemento n. Entonces, por definición de primer elemento:

$$\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}.$$

Para alcanzar nuestro objetivo, nos falta ver que $\dfrac{n}{m} < y$. Supongamos por contradicción que $\dfrac{n}{m} \geq y$. Como $-x \leq \dfrac{1-n}{m}$, tenemos que $0 < y - x \leq \dfrac{1}{m}$ lo que contradice la elección de m hecha al comienzo de la demostración. Por tanto, existe $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. ■

Teorema 1.8.5 $\mathbb{Q}$ no es continuo.

Demostración: En virtud del teorema 1.8.4, $\mathbb{Q}$ es denso, entonces la propiedad que no cumple para la continuidad es que "todo subconjunto no vacío acotado de números racionales tiene supremo en $\mathbb{Q}$". Por ser una propiedad que falla basta demostrar que existe un conjunto no vacío de números racionales acotado superiormente cuyo supremo no pertenece a $\mathbb{Q}$.
Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}\ :\ x > 0\,,\, x^2 < 2\}$, A tiene supremo, pero $\sup A \notin \mathbb{Q}$; los detalles de esta demostración pueden verse en los teoremas 1.9.7 y 1.10.1. ■

Usando los mismos argumentos se puede demostrar que el ínfimo del conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q}\ :\ x^2 > 2\}$, es igual al supremo de A. Ampliando A al conjunto $\{x \in \mathbb{Q}\ :\ x^2 < 2\}$, éste conserva el supremo. Así, podemos observar que todo elemento $x \in A$ es menor que cualquier $y \in B$, además $supA = infB \notin \mathbb{Q}$. Esto sugiere la idea que los números racionales tienen huecos, es decir, ellos tampoco son suficientes para pensar $\mathbb{R}$ como una recta.

$$-1 \quad -\tfrac{3}{4} \quad -\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{4} \quad 0 \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{4} \quad 1$$

Figura 1.8.1: Números Racionales

Ejercicios resueltos

1. **La sucesión de Fibonacci** . Esta sucesión fue propuesta por Leonardo Fibocacci también conocido como Leonardo de Pisa (1170? - 1250?). Considere la sucesión de números que comienza con 0 y 1; para obtener un número se suman los dos precedentes. Es decir:

$$u_0 = 0;\ u_1 = 1;\ u_2 = 0 + 1 = 1;\ u_3 = 1 + 1 = 2;\ u_4 = 1 + 2 = 3; \ldots u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

Demuestre que la sucesión formada por las razones de dos términos consecutivos $x_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ satisface la relación

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

Calcule x_{10} en función de x_0.

Solución:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \\
&= \frac{1}{\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}} \\
&= \frac{1}{\frac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{u_n}{u_{n+1}}} \\
&= \frac{1}{1 + x_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{10} &= \frac{1}{1 + x_9} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x_8}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x_7}}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x_6}}}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x_5}}}}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x_4}}}}}}
\end{aligned}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x_3}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x_2}}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x_1}}}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x_0}}}}}}}}}}.$$

2. (i) Demuestre que si el número racional $\dfrac{p}{q}$ con $(p,q)=1$, es una solución de la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

donde todos los coeficientes a_i son números enteros, entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

(ii) Demuestre que toda raíz racional de la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (1)$$

con coeficientes enteros, es un entero divisor del término constante a_0.

(iii) Analice la existencia de raíces racionales de la ecuación $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 4x - 30 = 0$.

Solución: (i) Siendo $\frac{p}{q}$ solución de la ecuación (1), tenemos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0.$$

Multiplicando toda la igualdad por q^n obtenemos,

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0, \tag{2}$$

entonces:

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}=-a_0q^n$$

dividiendo por p nos queda:

$$a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1}=-\frac{a_0q^n}{p}, \tag{3}$$

El primer miembro de la igualdad (3) es un entero, por tanto también lo es el segundo miembro, como $(p,q)=1$, p divide a a_0.

Para demostrar que q es un divisor de a_n, debemos pasar al segundo miembro de (2), a_np^n y luego dividir por q. Obtenemos así que:

$$a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}q+\cdots+a_0q^{n-1}=-\frac{a_np^n}{q}.$$

Usando nuevamente que $(p,q)=1$, obtenemos que q divide a a_n.

(ii) Según lo demostrado en (i), toda raíz racional es de la forma $\frac{p}{q}$ con p divisor de a_0 y q divisor de a_n. En este caso a_n es 1, por lo que q puede tomar las valores 1 ó -1. Por tanto la raíz es un entero que divide el término constante de la ecuación.

(iii) En virtud de (ii) las posibles raíces racionales son los divisores de 30, ±1, ±2, ±3, ±5, ±6,±15, ±30. Calculando el valor del polinomio en cada uno de estos valores, lo que puede hacerse rápidamente con una calculadora electrónica, podemos comprobar que los únicos números que satisfacen la ecuación son -3 y 5. Lo que significa que las otras raíces son irracionales o complejas.

3. Exprese el número racional $\frac{112}{23}$ como fracción continua (o fracción continuada) finita.

Solución: Usando el algoritmo de la división, tenemos:

$$\begin{aligned}112&=23\cdot4+20\\23&=20\cdot1+3\\20&=3\cdot6+2\\3&=2\cdot1+1.\end{aligned}$$

Así podemos escribir

$$\frac{112}{23}=\frac{23\cdot4+20}{23}=4+\frac{20}{23}=4+\cfrac{1}{\cfrac{23}{20}}$$

pero $23=20\cdot1+3$. Luego, tenemos:

$$
\begin{aligned}
4+\frac{1}{\frac{23}{20}} &= 4+\frac{1}{\frac{20\cdot 1+3}{20}} &&= 4+\frac{1}{1+\frac{3}{20}} \\
=4+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{20}{3}}} &= 4+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3\cdot 6+2}{3}}} &&= 4+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{2}{3}}} \\
=4+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{\frac{3}{2}}}} &= 4+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es cerrado para la división.
2. Si a y b son dos enteros positivos, qué puede decir de a y b:
   si $\dfrac{a}{b} < 1$, si $\dfrac{a}{b} = 1$, si $\dfrac{a}{b} > 1$.
3. Si n es un número natural, compare dos a dos los racionales siguientes:
   $$\frac{n}{n+1}; \frac{n+1}{n}; \frac{n+1}{n+2}; \frac{n+3}{n+1}.$$
4. Dada la sucesión $u_n = 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}}$. Calcular los seis primeros términos. Compare con el ejercicio resuelto 1.
5. Demuestre que todo número racional se puede escribir como fracción continua finita.
6. Inversamente, demuestre que toda fracción continua finita es un número racional.
7. Demuestre que el número real $5,3702$ es un número racional.
8. ¿ Existen números racionales con infinitos decimales no periódicos?

1.9 La operación de exponenciación o elevación a potencia

Potencias de exponente natural

La definición de potencia de exponente natural es buen ejemplo de aplicación del Principio de Recursión, como hemos visto en la sección 1.6.

Definición 1.9.1 Dado $a \in \mathbb{R}$, escribiremos:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a \end{aligned}$$

Teorema 1.9.2 Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:

(i) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

(ii) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(iii) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Demostración: Todas estas demostraciones relativas a números naturales las haremos usando el Principio de Inducción. Como se hace habitualmente cuando hay más de un número natural involucrado, se aplica inducción sobre uno de ellos y los demás se dejan fijos.

(i) Si hacemos inducción sobre n, tenemos:

- Para $n = 1, a^{1+m} = a^{m+1} = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1$
- Supongamos que la propiedad vale para n (Hipótesis de Inducción).

$$\begin{array}{lll} a^{(n+1)+m} & = a^{n+m+1} & = a^{n+m} \cdot a \\ & = a^n \cdot a^m \cdot a & = a^n \cdot a \cdot a^m \\ & & = a^{(n+1)} \cdot a^m. \end{array}$$

Por Principio de Inducción, la propiedad vale para todo n.

(ii) Aplicaremos inducción sobre m

- Si $m = 1, (a^n)^1 = a^n = a^{n \cdot 1}$.
- Supongamos que la propiedad se cumple para n (Hipótesis de Inducción).

$$\begin{array}{lll} (a^n)^{m+1} & = (a^n)^m \cdot a^n & = a^{n \cdot m} \cdot a^n \\ & = a^{n \cdot m + n} & = a^{n \cdot (m+1)} \end{array}$$

Por el Principio de Inducción la propiedad (ii) vale para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

(iii) Se deja como ejercicio. ■

Potencias de exponente entero negativo y nulo

Definición 1.9.3 Si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{Z}, n < 0$, entonces:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a^0 = 1$$

Debemos destacar que las potencias de exponente entero negativo no pueden tener base nula, por ejemplo, $0^{-3} \notin \mathbb{R}$. Tampoco está definida la expresión 0^0.

Definir a^0 como 1 puede parecer poco natural, pero es la única manera de preservar la ley de exponentes (i) del teorema 1.9.2 para números enteros. Pues,

$$a^{0+n} = a^n = a^0 \cdot a^n$$

lo que obliga a poner $a^0 = 1$.

Teorema 1.9.4 Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Demostración: Aplicaremos inducción sobre n.

- Sea $n = 1$. Si $m > 1$, entonces:

$$\frac{a^1}{a^m} = \frac{a}{a^{m-1}a} = \frac{1}{a^{m-1}} = a^{-(m-1)} = a^{1-m}$$

  Si $m = 1$, entonces:

$$\frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1 = a^0 = a^{1-1}$$

- Supongamos por hipótesis de inducción que $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{a^{n+1}}{a^m} = \frac{a^n \cdot a}{a^m} &= \tfrac{a^n}{a^m} \cdot a \\ &= a^{n-m} \cdot a \\ &= a^{n-m+1} \\ &= a^{(n+1)-m}. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.9.5 Si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$, entonces :

(i) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

(ii) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(iii) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(iv) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Demostración: (i) Como n, m son números enteros, existen las siguientes posibilidades:

- Si n, m son números naturales, entonces la propiedad corresponde a la parte (i) del teorema 1.9.2.
- Si $(n = 0)$ o $(m = 0)$, entonces:
$$a^{n+m} = a^{0+m} = a^m = 1 \cdot a^m = a^0 \cdot a^m$$
- Si $(n > 0)$ y $(m < 0)$, entonces $-m \in \mathbb{N}$ y tenemos:
$$a^n \cdot a^m = a^n \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{a^n}{a^{-m}} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$$
- Si $(n < 0)$ y $(m < 0)$, entonces $-n, -m \in \mathbb{N}$. Así:
$$a^n \cdot a^m = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot a^{-m}} = \frac{1}{a^{(-n)+(-m)}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = a^{n+m}.$$

Las restantes propiedades se demuestran de manera similar, por lo cual se dejan de ejercicio. ∎

Potencias de exponente racional

Para extender las potencias a exponente racional debemos, en primer lugar, considerar los números racionales no enteros, de la forma $\dfrac{1}{q}, q \in \mathbb{N}$.

Definición 1.9.6 (i) Si $a \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{N}$, denotaremos por $a^{\frac{1}{q}}$ ó $\sqrt[q]{a}$ al único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^q = a$

(ii) Si $a \in \mathbb{R}^-$, $q \in \mathbb{N}$, q impar, denotaremos por $a^{\frac{1}{q}}$ ó $\sqrt[q]{a}$ al único $y \in \mathbb{R}^-$ tal que $y^q = a$

(iii) Si $a = 0$ se define $0^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{0} = 0$.

El número $\sqrt[q]{a}$ se lee *raíz enésima de a o potencia $\frac{1}{q}$ de a.*

El siguiente teorema justifica la definición 1.9.6.

Teorema 1.9.7 Existencia de raíces.

(i) Si $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un único $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^n = a$.

(ii) Si $a < 0$ y $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces existe un único $x \in \mathbb{R}^-$ tal que $x^n = a$.

Demostración:

(i) Sea
$$A = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y \geq 0 \,,\; y^n \leq a\}.$$

A es no vacío, pues $0 \in A$. Demostremos ahora que A es acotado superiormente. Si $a \geq 1$, entonces si A no es acotado superiormente, debe existir $y \in A$ tal que $a < y$ lo que implica en este caso que $a < y^n$. Pero esto contradice el hecho que $y \in A$. Por tanto, para $a \geq 1$, A debe ser acotado superiormente. Ahora, si $0 < a < 1$, como $y^n \leq a$, se tiene que $y^n \leq 1$, lo que implica que $y \leq 1$ usando ejercicio resuelto 1. Como lo anterior vale para cualquier $y \in A$, 1 es una cota superior para A cuando $0 < a < 1$. Por lo tanto, si $a > 0$, A es acotado superiormente.

Luego el axioma del Supremo nos asegura la existencia en $\mathbb{R}$ de $\sup A$. Sea $x = \sup A$. Nótese que por la definición de x, él es único. Demostremos a continuación que $x^n = a$. Si nuestra afirmación anterior fuera falsa tendríamos por tricotomía que $x^n > a$ o $x^n < a$. Analicemos ambos casos.

Caso $x^n < a$:

Por ejercicio propuesto 1.6.5, para $0 < \varepsilon \leq 1$ se tiene que $(x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K$, donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x. Como $a - x^n > 0$ por hipótesis, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe de $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{1\ ,\ \dfrac{a-x^n}{K}\}$. Luego:

$$x^n + \varepsilon K \leq \frac{a-x^n}{K}K = a - x^n.$$

Por tanto, $(x+\varepsilon)^n \leq a$ y $x+\varepsilon\ \in A$. Lo que contradice que x es una cota superior de A.

Caso $a < x^n$:

Por ejercicio propuesto 1.6.5, para $0 < \varepsilon \leq 1$ se tiene que $(x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K$, donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x. Como $x^n - a > 0$ por hipótesis, la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ nos asegura la tal existencia de $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{1, \dfrac{x^n-a}{K}\}$. Como $x = \sup A$, para $\varepsilon > 0$ debe existir $y_0\ \in A$ tal que $x < y_0 + \varepsilon$. La expresión anterior implica que $x - \varepsilon < y_0$. Luego:

$$y_0^n > (x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K > x^n - \frac{(x^n-a)}{K}K = x^n - x^n + a = a.$$

Lo anterior contradice que $y_0\ \in A$.

Así, la única posibilidad que queda es que $x^n = a$.

(ii) Sea

$$A = \{y\ \in \mathbb{R}\ :\ y \leq 0\ ,\ y^n \geq a\}$$

A es no vacío, pues $0 \in A$. Veamos ahora que A es acotado inferiormente. Si $a \leq -1$ y si A no es acotado inferiormente debe existir $y\ \in A$ tal que $y < a$, lo que implica en este caso que $y^n < a$ (recuerde que n es impar); pero esto contradice el hecho que $y\ \in A$. Por tanto, para $a \leq -1$, A debe ser acotado inferiormente. Ahora si $-1 < a < 0$, como $y^n \geq a$, se tiene que $y^n \geq -1$ lo que implica que $y \geq -1$ (pues de lo contrario $y < -1$, que es una contradicción con nuestros supuestos). Como lo anterior vale para cualquier $y\ \in A$, -1 es una cota inferior de A cuando $-1 < a < 1$. Por lo tanto, si $a < 0$, A es acotado inferiormente.

Luego, el paralelo al axioma del Supremo para ínfimos nos asegura que A tiene un ínfimo en $\mathbb{R}$. Sea $x = \inf A$. Notemos que por la definición de x, él es único. Demostremos que $x^n = a$. Si nuestra afirmación anterior es falsa, por tricotomía $x^n > a$ ó $x^n < a$.

Caso $x^n > a$:

Como n es impar, por ejercicio propuesto 1.6.5, para $0 < \varepsilon \leq 1$ se tiene que $(x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K$ donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x. Como $x^n - a > 0$ por hipótesis, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{1, \dfrac{x^n-a}{K}, -x\}$. Luego $x^n - \varepsilon K > x^n - \dfrac{(x^n-a)}{K}K = a$. Por tanto $(x-\varepsilon)^n \geq a$. Por otro lado $\varepsilon < -x$, luego $x + \varepsilon < 0$. Entonces $x - \varepsilon \in A$, lo que es una contradicción por el hecho que x es una cota inferior de A.

Caso $a > x^n$:

Como n es impar por ejercicio propuesto 1.6.5, para $0 < \varepsilon \leq 1$, $(x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K$, donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x. Como $a - x^n > 0$ por hipótesis, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{1, \dfrac{a-x^n}{K}\}$ como $x = \inf A$, para $\varepsilon > 0$ debe existir $y_0 \in A$ tal que $y_0 - \varepsilon < x$. La expresión anterior implica que $y_0 < x + \varepsilon$. Luego:

$$y_0^n < (x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K < x^n + \frac{(a-x^n)}{K}K = x^n + a - x^n = a$$

lo que contradice que $y_0 \in A$.

De analizar ambos casos y en ambos llegar a contradicciones, concluimos que $x^n = a$. ■

Definición 1.9.8 Dado $a \in \mathbb{R}^+$ y un racional $r = \dfrac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$.

Teorema 1.9.9 $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

Demostración: Sea $y = (a^{\frac{1}{n}})^m$, entonces debemos demostrar que y es la raíz enésima de a^m, es decir, $y^n = a^m$. Entonces calculemos y^n.

$$y^n = ((a^{\frac{1}{n}})^m)^n = (a^{\frac{1}{n}})^{m\cdot n} = a^{\frac{m\cdot n}{n}} = a^m.$$

Que es lo que queríamos demostrar. ■

Es importante enfatizar la necesidad que a sea positivo, si n es par; pues si $a < 0$ y $n = 2k$, para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces $\sqrt[2k]{a} = y$ es equivalente a tener que $y^{2k} = a$, es decir, $(y^k)^2 = a$, pero como ningún número real elevado a dos puede ser negativo, esto es una contradicción. Así, expresiones del tipo $\sqrt{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{-3}$ no son números reales.

Como un número racional puede ser escrito de infinitas formas, debemos demostrar que las distintas escrituras de r no afectan la definición de a^r.

Teorema 1.9.10 Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $r = \dfrac{m}{n}, r = \dfrac{p}{q}; m, p \in \mathbb{Z}; n, q \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Demostración: $r = \dfrac{m}{n}$ y $r = \dfrac{p}{q}$, entonces $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$. Por teorema 1.2.14 $m \cdot q = n \cdot p$. Luego

$$(a^{\frac{p}{q}})^n = (a^{\frac{1}{q}})^{p\cdot n} = (a^{\frac{1}{q}})^{q\cdot m} = ((a^{\frac{1}{q}})^q)^m = (a^{\frac{q}{q}})^m = a^m$$

$$\Longrightarrow \ a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}. ■$$

Teorema 1.9.11 Sea $a, b \in \mathbb{R}, a > 0; b > 0; r, s \in \mathbb{Q}$, entonces:

(i) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$

(ii) $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$

(iii) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

(iv) $a^{-r} = (a^{-1})^r = (a^r)^{-1}$

(v) $(\dfrac{a}{b})^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

Demostración:

(i) si $r, s \in \mathbb{Q}$, entonces $r = \dfrac{m}{n}, s = \dfrac{p}{q}, m, p \in \mathbb{Z}\ n, q \in \mathbb{N}$. Luego:

$$a^{r+s} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{m\cdot q+p\cdot n}{n\cdot q}} = (a^{\frac{1}{n\cdot q}})^{m\cdot q+p\cdot n} = (a^{\frac{1}{n\cdot q}})^{m\cdot q}\cdot(a^{\frac{1}{n\cdot q}})^{p\cdot n} = a^{\frac{m\cdot q}{n\cdot q}}\cdot a^{\frac{p\cdot n}{n\cdot q}} = a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = a^r\cdot a^s.$$

(ii) Primero demostraremos que:

$$a^{\dfrac{1}{nq}} = (a^{\dfrac{1}{q}})^{\dfrac{1}{n}} = (a^{\dfrac{1}{n}})^{\dfrac{1}{q}}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sqrt[nq]{a} = z &\iff a = z^{nq}\ ;\ n, q \in \mathbb{Z} \\ &\iff a = (z^n)^q \\ &\iff \sqrt[q]{a} = z^n \\ &\iff \sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = z \end{aligned}$$

Si $r = \dfrac{m}{n}$, $s = \dfrac{p}{q}$, entonces:

$$(a^r)^s = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (((a^{\frac{1}{n}})^m)^p)^{\frac{1}{q}} = ((a^{\frac{1}{n}})^{mp})^{\frac{1}{q}} = ((a^{mp})^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{nq}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{r\cdot s}.$$

Las otras propiedades se demuestran de manera similar, por lo tanto se dejan como ejercicio.
■

Teorema 1.9.12 (i) Si $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$ y $r \in \mathbb{Q}, r > 0$, entonces $a^r < b^r$.

(ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, r, s números racionales tales que $r < s$, entonces $a^r < a^s$

(iii) Si $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, r, s números racionales $r < s$, entonces $a^r > a^s$.

Demostración:

(i) Primer caso: $0 < a < b \implies a^n < b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \ldots + a^{n-1}) \quad \text{(ejercicio propuesto de la sección 6).}$$

Entonces, como a , $b > 0$, tenemos que $b - a > 0 \iff b^n - a^n > 0$.

Segundo caso: $0 < a < b \iff a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$. Usando la definición 1.9.6

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} = y &\iff a = y^n \\ b^{\frac{1}{n}} = z &\iff b = z^n \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} a < b &\iff y^n < z^n \\ &\iff y < z \\ &\iff a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Tercer caso: $0 < a < b \iff a^r < b^r$ es una combinación de primer y segundo caso.

(ii) Primer caso: $n, m \in \mathbb{N}$. Si $n < m \iff n + d = m\ ;\ d \in \mathbb{N}$. Como $a^d > 1 \implies a^n a^d > a^n$. Luego $a^m = a^{n+d} = a^n a^d > a^n$.

Segundo caso: Si $p, q \in \mathbb{Z}$, luego $p = -n\ ;\ n \in \mathbb{N}$ y $q = -m\ ;\ m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
p<q \iff -n<-m \iff m<n \quad &\implies \quad a^m<a^n \\
&\implies \quad \frac{1}{a^m}>\frac{1}{a^n} \\
&\implies \quad a^{-m}>a^{-n} \\
&\implies \quad a^{-n}<a^{-m} \\
&\implies \quad a^p<a^q.
\end{aligned}$$

Tercer caso: $r=1/p$ y $s=1/q$ con $p,q\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Luego:

$$r<s \iff \frac{1}{p}<\frac{1}{q} \iff q<p.$$

Por otro lado, $a^{1/p}=y \iff y^p=a$ y $a^{1/q}=z \iff z^q=a$.

Además,

$$a^{1/p}=\sup A \quad \text{con} \quad A=\{y\in\mathbb{Q}\ :\ y^p<a\}$$

y

$$a^{1/q}=\sup B \quad \text{con} \quad B=\{z\in\mathbb{Q}\ :\ z^q<a\}.$$

Como $q<p$ con $p,q\in\mathbb{Z}$, entonces $x^q<x^p<a$ para todo $x>0$. Si $x\in A \implies x^p<a \implies x^q<a \implies x\in B$. Luego, $A\subset B \implies \sup A\leq\sup B \implies a^{1/p}\leq a^{1/q}$. Para descartar la igualdad, supongamos $a^{1/p}=a^{1/q}$, entonces $(a^{1/p})^p>(a^{1/q})^q \implies a>a$. Como lo anterior es una contradicción, concluimos que $a^{1/p}<a^{1/q}$.

Cuarto caso: Para un racional en general, es una combinación de segundo y tercer caso.

- Se deja como ejercicio. ■

Teorema 1.9.13 Si $a>1$ y $x\in\mathbb{R}$. Entonces, dado $\varepsilon>0$, existen números racionales r y s tales que:

(i) $r<x<s$.

(ii) $a^s-a^r<\varepsilon$.

Demostración: Usaremos la desigualdad de Bernoulli, que dice que si $h>-1$, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $(1+h)^n\geq 1+nh$, lo que implica que $h\leq\dfrac{(1+h)^n-1}{n}$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ en virtud de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existen r,s números racionales tales que:

$$x-\frac{1}{2n}<r<x<s<x+\frac{1}{2n},$$

con lo cual tenemos (i).

Para (ii), observemos que

$$s-r<x+\frac{1}{2n}-r<x+\frac{1}{2n}-(x-\frac{1}{2n}) \implies s-r<\frac{1}{n}.$$

Ahora veamos qué sucede con la diferencia

$$\begin{aligned} a^s - a^r &= a^{s-r+r} - a^r \\ &= a^{s-r}a^r - a^r \\ &= a^r(a^{s-r} - 1). \end{aligned}$$

Como $s - r > 0$ y $a > 1$, tenemos que $a^{s-r} \geq a^0 = 1$. Entonces podemos tomar $h = a^{s-r} - 1$ en la desigualdad de Bernoulli y

$$\begin{aligned} a^{s-r} - 1 &\leq \frac{(1 + a^{s-r} - 1)^n - 1}{n} \\ &= \frac{(a^{s-r})^n - 1}{n} \\ &< \frac{a^{(1/n)n} - 1}{n} \\ &= \frac{a-1}{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, elegimos n de modo que:

$$n > \frac{a-1}{\varepsilon}a^N, \tag{2}$$

donde $N \in \mathbb{N}$ es tal que $x < N$ (propiedad arquimediana).
Para este n elegido en función de ε, tenemos que existen r, s tal que

$$\begin{aligned} a^s - a^r &= a^r(a^{s-r} - 1) \\ &< a^r\frac{a-1}{n} \quad (\mathrm{I})\ ; \quad (\text{por } (1)) \\ &< a^N\frac{a-1}{n} \quad \text{pues } r < x < N \\ &< \varepsilon \quad ; \quad (\text{usando } (2)). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.9.14 Si $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen números racionales r y s tales que:

(i) $r < x < s$

(ii) $a^r - a^s < \varepsilon$.

Demostración: Si $0 < a < 1$, entonces $a^{-1} > 1$. Aplicando teorema 1.9.13 para $-x$ y a^{-1}, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen números racionales r', s' tales que

$$s' < -x < r' \tag{1}$$

y

$$(a^{-1})^{r'} - (a^{-1})^{s'} < \varepsilon. \tag{2}$$

De (1) obtenemos que $-r' < x < -s'$. De (2) obtenemos que $a^{-r'} - a^{-s'} < \varepsilon$. Tomando $r = -r'$ y $s = -s'$ se tiene la propiedad enunciada en el teorema. $\blacksquare$

Las potencias de exponente real

Para tener potencias de exponente real, debemos extender la operación a exponentes irracionales. En la sección 1.10 veremos que los números irracionales aparecen como supremos de algunos conjuntos de números racionales. Para poder extender las potencias a exponentes irracionales debemos usar una idea similar. Por otro lado, como el crecimiento de a^r, cuando r varía y a permanece fijo cambia si $0 < a < 1$ ó $a > 1$, separaremos ambos casos.

Definición 1.9.15 (i) Si $a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R}$. Se define $a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$.

(ii) Si $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Se define $a^x = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$.

Teorema 1.9.16 (i) Si $a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $\sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$.

(ii) Si $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1, x \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $\inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$.

Demostración:

(i) Sea $A = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$, veamos que:

- A es acotado.

  Dado $x \in \mathbb{R}$, por principio de Arquímedes existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$, entonces si $r \leq x$, también $r < n$ y así $a^r < a^n$. Luego existe cota superior de A , a^n es una.

- A es no vacío. Dado $x \in \mathbb{R}$, siempre podemos encontrar $r \in \mathbb{Q}, r < x$ y por tanto $\exists a^r \in A$.

  Por axioma del Supremo, existe $\sup A \in \mathbb{R}$.

(ii) Es análoga a (i). ■

Teorema 1.9.17 (i) $a \in \mathbb{R}, a > 1; x \in \mathbb{R}$, entonces $a^x = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}$.

(ii) Si $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1, x \in \mathbb{R}$, entonces $a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}$.

Demostración:

(i) Si $r \geq x$ entonces por teorema 1.9.16, $a^r \geq a^x$. Por tanto a^x es cota inferior del conjunto $\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}$.

Dado $\varepsilon > 0$, por teorema 1.9.11 , existe $r, s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x < s$ y $a^s - a^r < \varepsilon$. Entonces $a^s - a^x \leq a^s - a^r < \varepsilon$. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $s \in \mathbb{Q}, x \leq s$ de modo que $a^s < a^x + \varepsilon$. Por definición de ínfimo, $a^x = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}$.

(ii) Es análoga a (ii). ■

Teorema 1.9.18 Si $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:

(i) $(a^x)^{-1} = (a^{-1})^x = a^{-x}$

(ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(iii) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(iv) Si $a > 1$; $x < y$ entonces $a^x < a^y$

(v) Si $a < 1$, $x < y$ entonces $a^x > a^y$.

Demostración:

(i) Analizaremos por separado los casos $a = 1, a > 1, 0 < a < 1$.

Primer caso: Si $a = 1$, se cumple trivialmente.

Segundo caso: Si $a > 1$.

- Supongamos $r \geq x$, entonces $a^r \geq a^x$ y por tanto $\dfrac{1}{a^x} \geq \dfrac{1}{a^r}$, ó, lo que es lo mismo, $(a^x)^{-1} \geq (a^r)^{-1} = (a^{-1})^r$ (por teorema 1.9.11), lo cual nos dice que $(a^x)^{-1}$ es cota superior del conjunto $A = \{(a^{-1})^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}$.
- Sea c otra cota superior de nuestro conjunto A, entonces $c \geq (a^{-1})^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}, r \geq x$. Así $c^{-1} \leq (a^{-r})^{-1} = a^r$; para todo $r \in \mathbb{Q}, r \geq x$. En particular, $c^{-1} \leq a^x$ por teorema 1.9.17, lo que implica que $\dfrac{1}{a^x} \leq \dfrac{1}{c^{-1}}$, o, lo que es lo mismo, $(a^x)^{-1} \leq (c^{-1})^{-1} = c$. Esto nos dice que $(a^x)^{-1}$ es la menor cota superior del conjunto A.

  En síntesis, hemos demostrado que $(a^x)^{-1} = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}$ y por definición de potencia de exponente real, $(a^x)^{-1} = (a^{-1})^x$.

  Para la segunda desigualdad, comencemos aplicando la definición de potencia de exponente real:

$$\begin{aligned}
(a^{-1})^x &= \sup\{(a^{-1})^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\} \\
&= \sup\{a^{-r} : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\} \\
&= \sup\{a^{-r} : -r \in \mathbb{Q}, -r \leq -x\} \\
&= \sup\{a^t : t \in \mathbb{Q}, t \leq -x\} \\
&= a^{-x}.
\end{aligned}$$

Tercer caso: Si $0 < a < 1$. Entonces $a^{-1} > 1$ y podemos aplicar lo demostrado en el segundo caso a a^{-1}.

$$(a^{-1})^x = (a^{-1})^{-(-x)} = ((a^{-1})^{-1})^{-x} = a^{-x}$$

Para la otra igualdad:

$$((a^{-1})^x)^{-1} = ((a^{-1})^{-1})^x; \quad \text{lo cual implica que}$$

$$((a^{-1})^x) = [((a^{-1})^{-1})^x]^{-1} = (a^x)^{-1}$$

(ii) Primer caso: Sea $a > 1$.

Por teorema 1.9.13, dada $\varepsilon > 0$, existen números racionales r, s tales que: $r < x + y < s$ y $a^s - a^r < \varepsilon$.

Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existen números racionales r_1, r_2, s_1, s_2 tales que:

$$r_1 < x < r_2$$

$$s_1 < y < s_2$$

$$r < r_1 + s_1 < x + y < r_2 + s_2 < s$$

Luego:

$$a^r < a^{r_1+s_1} < a^{x+y} < a^{r_2+s_2} < a^s \ .$$

Pero usando la propiedad respectiva para exponentes racionales, se tiene:

$$a^{r_1+r_2} = a_1^r \cdot a_2^r \ , \qquad a^{s_1+s_2} = a_1^s \cdot a_2^s \ .$$

Entonces:

$$a^x \cdot a^y - a^{x+y} < a^{r_2} \cdot a^{s_2} - a^{x+y} < a^{r_2+s_2} - a^r < a^s - a^r < \varepsilon \qquad (1)$$

$$a^{x+y} - a^x \cdot a^y < a^s - a^{r_1} \cdot a^{s_1} = a^s - a^{r_1+s_1} < a^s - a^r < \varepsilon \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que para todo $\varepsilon > 0$,

$$|a^{x+y} - a^x \cdot a^y| < \varepsilon.$$

Por tanto, por ejercicio resuelto 1.3.5 y teorema 1.4.2 (iv), $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Segundo caso: $0 < a < 1$. Entonces, $a^{-1} > 1$ y por tanto:

$$a^{x+y} = (a^{-1})^{-(x+y)} = (a^{-1})^{-x+(-y)} = (a^{-1})^{-x} \cdot (a^{-1})^{-y} = a^x \cdot a^y.$$

Tercer caso: $a = 1$, es inmediato.

(iii) Aplicando inducción podemos obtener la propiedad tomando $y = n \in \mathbb{N}$. En efecto, $(a^x)^1 = a^x = a^{x \cdot 1}$.

Si $(a^x)^n = a^{xn}$, entonces:

$$(a^x)^{n+1} = (a^x)^n \cdot a^x = a^{xn} \cdot a^x = a^{xn+x} = a^{x(n+1)}.$$

Ahora demostremos la propiedad para $y = m \in \mathbb{Z}$. Si $m = 0$, es inmediato. Si $m = -n$; $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(a^x)^m = (a^x)^{-n} = ((a^x)^{-1})^n = (a^{-x})^n = a^{-xn} = a^{x(-n)} = a^{xm}.$$

Enseguida extenderemos la propiedad para $y \in \mathbb{Q}$. Entonces $y = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

$$(a^x)^y = (a^x)^{\frac{m}{n}} = ((a^x)^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{xm})^{\frac{1}{n}}.$$

Entonces:

$$((a^x)^{\frac{m}{n}})^n = ((a^{xm})^{\frac{1}{n}})^n = a^{xm}.$$

Por definición de raíz enésima,

$$a^{x\frac{m}{n}} = (a^x)^{\frac{m}{n}}.$$

Finalmente, consideremos $y \in \mathbb{R}$.

Primer caso: $a > 1$ y $x > 0$. Por teorema 1.9.13, dado $\varepsilon > 0$ existen $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < y < s$ y $(a^x)^s - (a^x)^r < \varepsilon$.

Así:

$$a^{xy} - (a^x)^y < a^{xs} - (a^x)^y < a^{xs} - (a^x)^r = a^{xs} - a^{xr} < \varepsilon. \quad (1)$$

Del mismo modo,

$$(a^x)^y - a^{xy} < (a^x)^s - a^{xy} < (a^x)^s - a^{xr} = a^{xs} - a^{xr} < \varepsilon. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que dado cualquier $\varepsilon > 0$,

$$|a^{xy} - (a^x)^y| < \varepsilon.$$

Por tanto, usando ejercicio resuelto 1.3.5 y teorema 1.4.2 (iv), $a^{xy} = (a^x)^y$.

Si $x < 0$, entonces

$$(a^x)^y = ((a^x)^{-1})^{-y} = (a^{-x})^{-y} = a^{(-x)(-y)} = a^{xy}.$$

Segundo caso: $0 < a < 1$. Entonces $a^{-1} > 1$ y podemos aplicar lo demostrado en el caso 1, como se ha hecho en el teorema anterior.

Tercer caso: $a = 1$, es trivial.

(iv) Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existen números racionales r, s tales que $x < r < s < y$. Si q es un racional menor o igual que x entonces $a^q < a^r$ por Teorema 1.9.12. Así a^r es cota superior del conjunto $\{a^q \,:\, q \in \mathbb{Q},\, q \leq x\}$. Por tanto

$$\begin{array}{lll} a^x & \leq & a^r \\ a^r & < & a^s \quad \text{por teorema 1.9.12} \\ a^s & \leq & a^y \quad \text{por definición .} \end{array}$$

Por transitividad de la relación $\leq$ concluimos que $a^x < a^y$.

(v) Se deja como ejercicio, pues es similar a (iv). ■

Ejercicios resueltos

1. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\sqrt[x]{x+y} = 2 \quad (1.2)$$
$$(x+y) \cdot 3^x = 279936. \quad (1.3)$$

Solución: De la ecuación 2.23 obtenemos $(x + y) = 2^x$. Reemplazando en la ecuación 2.24 y usando que $279936 = 6^7$, nos queda $2^x \cdot 3^x = 6^x = 6^7$, lo que implica $x = 7$. Sustituyendo este valor en la ecuación 2.23 tenemos

$$(7 + y) \cdot 3^7 = 2^7 \cdot 3^7,$$

lo que implica $7 + y = 128$ y por tanto, $y = 121$.

2. Demuestre que

$$1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x^2)^2}\ ,\ x\neq 1.$$

Solución: Usando el principio de inducción:

Si $n=1$, el primer miembro se reduce a 1. El segundo miembro toma la forma $\dfrac{1-2x+x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{(1-x)^2}{(1-x)^2}=1.$

Supongamos que la fórmula vale para n y sumemos a ambos miembros $(n+1)x^n$,

$$\begin{aligned}1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}+(n+1)x^n &= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x^2)^2}+(n+1)x^n\\ &= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}(n+1)(1-x)^2x^n}{(1-x^2)^2}\\ &= \frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\\ &= \frac{1-((n+1)+1)x^{n+1}+(n+1)x^{(n+1)+1}}{(1-x^2)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula vale para $n+1$ y por inducción , vale para todo $n\in\mathbb{N}$.

3. Demuestre que

$$(1+x)(1+x^2)\ldots\ldots(1+x^{2n})=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{2^{n+1}-1}=\frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x}\ ,\ x\neq 1.$$

Solución:

Para $n=1$, las igualdades se cumplen trivialmente. Supongamos que

$$(1+x)(1+x^2)\ldots\ldots(1+x^{2^n})=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{2^{n+1}-1}.$$

Multiplicando ambos miembros por $(1+x^{2^{(n+1)}})$, obtenemos

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)\ldots\ldots(1+x^{2n})(1+x^{2^{(n+1)}}) &= (1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{2^{n+1}-1})(1+x^{2^{(n+1)}})\\ &= 1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{2^{n+1}-1}+x^{2^{(n+1)}}+x^{2^{(n+1)}+1}+\ldots\\ &+ \ldots x^{2^{n+1}+2^{n+1}-1}\\ &= 1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots x^{2^{n+2}-1}\end{aligned}$$

La segunda igualdad resulta de aplicar la fórmula para sumar los primeros 2^{n+1} términos de una progresión geométrica de razón x.

4. Dadas las sucesiones definidas por recurrencia:

$$\begin{aligned}a_1 &= 3,\ a_{n+1} = 3^{a_n}\\ b_1 &= 9,\ b_{n+1} = 9^{b_n}.\end{aligned}$$

Para cada n fijo, encuentre el menor número p tal que $a_p\geq b_n$.

Solución: Dado que $3>9$, por propiedades de las potencias $b_n>a_n$, para todo n. Esto nos dice que, dado n, el número p en mayor que n. Para poder inspirarnos veamos que sucede para algunos casos particulares.

Si $n = 1$, entonces

$$b_1 = 9, \ \ a_2 = 3^3 = 27, \ \ \text{lo que implica que en este caso } \ p = 2.$$

Si $n = 2$, entonces

$$b_2 = 9^9 = \left(3^2\right)^9 = 3^{18},$$

$$a_3 = 3^{27}, \ \ \text{por tanto } \ a_3 > b_2 \ \text{ y } \ p = 3.$$

Si $n = 3$, entonces

$$b_3 = 9^{3^{18}} = 3^{2\cdot 3^{18}},$$

$$a_4 = 3^{3^{27}}, \ \ \text{por tanto } \ a_4 > b_3 \ \text{ pues,}$$

$$3^{27} = 3^{18} \cdot 3^9 > 3^{18} \cdot 2.$$

Por tanto, $p = 4$. Estos cálculos particulares parecen indicar que

Para cada n, p= n+1; lo que se debe al hecho que $a_k > 2b_{k-1}$.

Para responder a lo pedido en el enunciado del problema, debemos demostrar la última afirmación. Lo haremos por inducción: $a_2 = 3^3 = 27 > 2 \cdot 9 = 2b_1$. Ahora, supongamos que $a_k > 2b_{k-1}$,entonces $a_k = 2b_{k-1} + M$, con $M \geq 1$, pues todos los números involucrados son naturales. Así,

$$2b_k = 2 \cdot 9^{b_{k-1}} = 2 \cdot (3^2)^b_{k-1} = 2 \cdot 3^{2b_{k-1}} = 2 \cdot 3^{a_k - M} = 2 \cdot 3^{a_k} \cdot 3^{-M} < a_{k+1},$$

pues, como $M \geq 1$, $\dfrac{2}{3^M} < 1$.

$$a_{k+1} = 3^{a_k} > 3^{2b_{k-1}} = 9^b_{k-1} = b_k.$$

5. Demuestre la desigualdad

$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Solución: La desigualdad se verifica trivialmente para $n = 1$. Supongamos que se verifica para n.

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad &< \quad 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \quad \frac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \quad \frac{\sqrt{4n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&< \quad \frac{\sqrt{(2n+1)^2} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \quad \frac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \\
&= \quad 2\sqrt{n+1}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad de la derecha vale para todo n.

La desigualdad de la izquierda se obtiene acotando inferiormente cada sumando por el menor de todos ellos $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, como hay n sumandos se tiene

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ demuestre:
   (a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
   (b) Si además $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces:
   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
   es decir, la media aritmética es mayor que la media geométrica. ¿ Cuándo hay igualdad?
   (c) Hallar el máximo valor de un producto sabiendo que la suma de sus factores es constante.
   (d) Si $a_1, \ldots, a_n$ son n números reales positivos, entonces
   $$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$
   (e) Dado $k \in \mathbb{N}$
   $$\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n}\right)^n > (n!)^k.$$

Solución:

(a) Como para cualquier número real su cuadrado es positivo o nulo, se tiene que:
$$(a-b)^2 \geq 0 \implies a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

(b) Siendo a y b números positivos, existe $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, y podemos aplicar la parte (a), es decir,
$$(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \leq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$
Si observamos la desigualdad de (a) vemos que ella es una igualdad cuando $a = b$; lo que se transmite para la desigualdad de (b).

(c) Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $S = a + b$ y $P = ab$. Luego:
$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$
y
$$4P = S^2 - (a-b)^2.$$
Entonces: Dado S, el producto P es máximo cuando $a = b$; dado P, la suma S es mínima cuando $a = b$.

(d) Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, tales que $S = a_1 + \cdots + a_n$ y $P = a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$. Sean a_i, a_j dos factores distintos cualesquiera; si los reemplazamos por $\frac{a_i + a_j}{2}$, $\frac{a_i + a_j}{2}$, el producto P crece y la suma S permanece igual. Por tanto, el producto puede aumentar sin alterar la suma y el producto es máximo cuando todos los factores son iguales. En este último caso el valor de cada factor es $\frac{S}{n}$ y el valor máximo del producto es $\left(\frac{S}{n}\right)^n$, o sea:
$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n.$$

(e) Tomando los a_i de la parte (d) como i^k con $i = 1, \ldots, n$, son todos distintos y se tiene que :
$$\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n} > \left(\frac{1^k \cdot 2^k \cdots n^k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n}\right)^n > (n!)^k.$$

7. (a) Calcule la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica con primer término a y razón r.
   (b) Demuestre que $\inf\{r^n \,:\, n \in \mathbb{N}, r \in (0,1)\} = 0$.
   (c) Analice el comportamiento de la suma encontrada en la primera parte cuando n toma valores muy grandes.

Solución:

(a) Usando el ejercicio propuesto 1.6.11 tenemos que:

$$a(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = a(1-x^n),$$

obteniendo que la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

(b) Si $0 < r < 1$, entonces la sucesión de números r^n, variando $n \in \mathbb{N}$, decrece a medida que crece n y $\inf\{r^n \,:\, n \in \mathbb{N}, r \in (0,1)\} = 0$.

En efecto: $0 < r < 1$ implica que $\dfrac{1}{r} > 1$ y $\dfrac{1}{r} = 1 + h$ para algún $h > 0$.

$\left(\dfrac{1}{r}\right)^n = (1+h)^n > 1 + nh$, usando la desigualdad de Bernoulli, ver ejercicio resuelto 1.6.14.

Es decir si n crece $\dfrac{1}{r^n}$ crece y, por tanto, r^n decrece. Pero $0 < r^n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que 0 es una cota inferior del conjunto $\{r^n \,:\, n \in \mathbb{N}, r \in (0,1)\}$.

Dado $\varepsilon > 0$ por principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$1 + Nh > \frac{1}{\varepsilon}$$

por tanto,

$$\frac{1}{r^N} > 1 + Nh > \frac{1}{\varepsilon}$$

y $r^N < \varepsilon$.

(c) Usando el resultado (b) podemos considerar $r^n \approx 0$ para n suficientemente grande, es decir,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \approx \frac{a}{1-r}$$

cuando n es muy grande.

8. Demuestre que:

   (a) Todo número real con una cantidad finita de decimales es racional.
   (b) Todo número real con decimales periódicos es racional.

Solución:

(a) Sea $x = [x] + 0, a_1 a_2 \ldots a_n$ con $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $[x] \in \mathbb{Z}$ basta analizar la parte decimal.

$$\begin{aligned}
0,a_1a_2\ldots a_n &= a_1 10^{-1}+a_2 10^{-2}+\cdots+a_n 10^{-n}\\
&= \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\\
&= \frac{a_1 10^{n-1}+a_2 10^{n-2}+\cdots+a_n}{10^n}\\
&= \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

donde $p,q\in\mathbb{Z}$ y $q\neq 0$.

(b) Si $x=0,a_1\ldots a_pa_1\ldots a_p\ldots$ entonces:

$$x=a_1\cdots a_p(10^{-p}+10^{-2p}+\cdots)=a_1\cdots a_p(10^{-p}+(10^{-p})^2+\cdots+(10^{-p})^n+\cdots)$$

usando la parte (c) del ejercicio anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
x &= a_1\cdots a_p\left(\frac{10^{-p}}{1-\dfrac{1}{10^p}}\right)\\
x &= a_1\cdots a_p\left(\frac{10^{-p}}{\dfrac{10^p-1}{10^p}}\right)\\
x &= \frac{a_1\cdots a_p}{10^p-1}\in\mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

9. Calcular
$$\frac{x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}+\ldots+\dfrac{1}{x^{2n+1}}}.$$

Solución: El numerador de la expreión es una progresión geométrica de razón x^2 y con primer término $a=x$. Por tanto, aplicando la fórmula obtenida en el ejercicio 7, tenemos

$$x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n+1}=\frac{(x(x^2)^2-1)}{x^2-1}. \tag{1}$$

El denominador también es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{x^2}$, por tanto, vale

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\ldots+\frac{1}{x^{2n+1}}\\
&\qquad= \frac{\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^n-1\right]}{\dfrac{1}{x^2}-1}\\
&\qquad= \frac{\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{x^{2n}}-1\right]}{\dfrac{1}{x^2}(1-x^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\dfrac{1-x^{2n}}{x^{2n}}}{\dfrac{1-x^2}{x}} \\ &= \frac{x^{2n}-1}{x^{2n-1}(x^2-1)}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2), tenemos:

$$\frac{x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}+\ldots+\dfrac{1}{x^{2n+1}}} = \frac{x\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)}{\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n-1}(x^2-1)}} = \frac{x(x^{2n}-1)(x^2-1)x^{2n-1}}{(x^2-1)(x^{2n}-1)} = x^{2n}.$$

10. (a) Escriba el número natural $x = 5728$ como suma de potencias con base b, tomando $b = 10$, $b = 6$, $b = 2$.
(b) Escriba el número 0 en una base cualquiera $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.
(c) Extender la escritura para números naturales en base b a los números enteros.
(d) Extender la escritura para números naturales en base b a los números racionales no enteros. Escriba $\alpha = 0;509$ en base 10 y 6.

Solución:

(a) Dado $x \in \mathbb{N}$, este puede escribirse en el sistema decimal

$$x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$$

$a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, usando potencias x puede ser escrito como

$$x = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 10^0 = \sum_{i=0}^{n} a_1 10^i.$$

Esta escritura puede generalizarse a cualquier base $b \geq 2$, $b \in \mathbb{N}$. En el sistema decimal $b = 10$.
Ejemplo: $x = 5728$.
Si $b = 10$, entonces

$$x = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0.$$

Si $b = 6$, entonces

$$5728 = 5184 + 432 + 108 + 0 + 4 = 4 \cdot 6^4 + 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0.$$

Por tanto, 5728 en base 10 se escribe 42304 en base 6.
La base más usada es $b = 2$, que se ocupa en informática. Veamos este mismo número en base 2.

$$\begin{aligned} x &= 4096 + 0 + 1024 + 512 + 0 + 0 + 64 + 32 \\ &= 1 \cdot 2^{12} + 0 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + \\ &\quad +1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0, \end{aligned}$$

es decir, $x = 1011001100000$ en base 2.

(b) Si $x = 0$, entonces $0 = 0 \cdot b^0$ para tado $b \geq 2$. Entonces $0 = 0$ en cualquier base.

(c) Si $x \in \mathbb{Z}^-$, entonces se usa la misma escritura de (a) con el signo correspondiente.

(d) Si x es un número racional no entero, entonces $x = [x] + \alpha$ con $0 < \alpha < 1$.
Como ya sabemos escribir números enteros con respecto a cualquier base, trataremos los números entre 0 y 1.
Si $b = 10$ y $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$, entonces $\alpha = a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n} + \cdots$.
Por ejemplo si $\alpha = 0,509$; α se puede escribir como

$$0,509 = 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}.$$

Veamos cómo escribir este mismo número en base 6:

$$\alpha = d_1 6^{-1} + d_2 6^{-2} + \cdots + d_n 6^{-n} + \cdots$$

Como

$$0,509 = \frac{3,054}{6}$$

Además,

$$3,054 = 3 + \frac{0,324}{6}$$

Luego,

$$\alpha = \frac{3 + 0,054}{6} = \frac{3}{6} + \frac{0,324}{6^2} = 3 \cdot 6^{-1} + 0,324 \cdot 6^{-2}.$$

Esta escritura nos da el valor de α en base 6 con un sextesimal con resto $0,324 \cdot 6^{-2}$.
Para calcular el siguiente dígito procedemos a dividir 0,324:

$$0,324 = 0 + 0,324 = 0 + \frac{1,944}{6}.$$

Esto nos dice que el dígito d_2 que acompaña a 6^{-2} es 0.

$$1,944 = 1 + 0,944 \implies d_3 = 1.$$

Ahora como

$$0,944 = 0 + 0,944 = 0 + \frac{5,664}{6} \implies d_4 = 0.$$
$$5,664 = 5 + 0,664 = 5 + \frac{3,984}{6} \implies d_5 = 5.$$
$$3,984 = 3 + 0,984 = 3 + \frac{5,904}{6} \implies d_6 = 3.$$

Entonces 0,509 en base 6 queda con una aproximación de 7 sextésimos y se escribe como:

$$0,3010535\ldots$$

Como este proceso es infinito, se detiene una vez alcanzado el grado de exactitud deseado.

$$0,509(\text{ en base } 10\ ) = 3 \cdot 6^{-1} + 0 \cdot 6^{-2} + 1 \cdot 6^{-3} + 0 \cdot 6^{-4} + 5 \cdot 6^{-5} + 3 \cdot 6^{-6} + 5 \cdot 6^{-7} + \cdots$$

A veces este procedimiento puede ser finito, por ejemplo expresar $\frac{1}{3}$ en base 3 se reduce a observar que $\frac{1}{3} = 1 \cdot 3^{-1}$, por tanto $\frac{1}{3}$ en base 3 es 0,1 y en base 10 es $0,333333\ldots$.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre la propiedad (iii) del teorema 1.9.2
2. Demuestre la propiedad (ii), (iii),(iv) del teorema 1.9.5
3. Demuestre la propiedad (iii), (iv), (v) del teorema 1.9.11
4. Demuestre la propiedad (iii) del teorema 1.9.12.
5. Demuestre la propiedad (ii) del teorema 1.9.16
6. Demuestre la propiedad (ii) del teorema 1.9.17
7. Demuestre la propiedad (v) del teorema 1.9.18
8. Deduzca las fórmulas de las soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.
9. ¿Cuál de las siguientes expresiones definen un número real?
   $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$, $0^{-\frac{1}{2}}$, $0^{\frac{1}{2}}$, $(-4)^{\frac{11}{12}}$, $4^{\frac{12}{11}}$, $4^{-\frac{11}{12}}$, $(-4)^{-\frac{12}{11}}$.
10. ¿Bajo qué condiciones sobre x las siguientes expresiones definen un número real ?
    $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $\sqrt{x-2}\sqrt{x+4}$, $\sqrt{x^2 + 2x - 8}$, $\sqrt[3]{4 - x^2}$, $\sqrt[4]{4 - x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}$,
    $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{6} + \sqrt{x-6}}{\sqrt{x^2 - 36}}$, $\dfrac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + (a-x)^{\frac{3}{2}}}{(a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}} + (a-x)^{\frac{1}{2}}}$, a es un número fijo.
11. Estudiar el crecimiento de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ cuando n crece.
12. Demuestre que las ecuaciones $y = \dfrac{10}{x}$, $z = \dfrac{y^2}{x}$, $z^2 = x^2 + y^2$ pueden ser reducidas a una ecuación cuadrática para x^4. (Ejemplo citado por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo 13).
13. Resuelva algebraicamente uno de los famosos problemas geométricos planteados por los griegos de la Antigüedad y que no pudieron resolver. Se trata de construir con regla y compás la arista de un cubo que tenga el doble del volumen de uno dado previamente. ¿ Por qué cree Ud. que ellos no pudieron resolver geométricamente algo que algebraicamente es bastante sencillo ?
14. (a) Verifique que el cambio de variable $y = x - \dfrac{a}{3}$ transforma la ecuación $y^3 + ay + by + c = 0$ en $x^3 + px + q$.

    (b) Verifique que $x^3 + px + q = 0$, si

    $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

    Fórmula de G. Cardano (1501-1571) y N. Tartaglia (1506- 1557).

    (c) Encuentre una raíz de la ecuación $x^3 + 3x + 2 = 0$.
15. Demuestre la desigualdad

    $$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

1.10 Los números irracionales

A pesar de que los griegos trabajaron sólo con números enteros positivos y desconocieron el cero, encontraron geométricamente los números irracionales a través de los segmentos inconmensurables, es decir, aquellos que no tienen una medida común. Este hecho tuvo para ellos, en particular para la Escuela Pitagórica (siglo 5 a.C), un efecto destructor, pues contradecía la base misma de su concepción discreta de las cosas. Para ellos las figuras geométricas estaban constituidas por cantidades finitas de puntos. El teorema de Pitágoras implica la existencia de magnitudes (segmentos) inconmensurables. Para ello basta tomar un cuadrado cuyo lado tenga longitud 1 y se tiene que el lado y la diagonal son inconmensurables; por tanto, estos segmentos no pueden estar formados por una cantidad finita de puntos (¿ por qué ?). Fue el primer choque en la historia de la matemática entre lo discreto y lo continuo, lo finito y lo infinito. En esta sección, mostraremos cómo aparecen los números irracionales en nuestro contexto axiomático, cómo ellos completan $\mathbb{Q}$ formando un continuo: $\mathbb{R}$, y entonces sí podemos con tranquilidad, la tranquilidad del soporte que da la teoría, representar $\mathbb{R}$ como una línea recta y construir todo el análisis.

Teorema 1.10.1 $\sqrt{2}$ no es racional

Demostración: Por definición, $\sqrt{2}$ es un número $x > 0$, tal que de $x^2 = 2$. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces es de la forma p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Luego $(p/q)^2 = 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p y q no tienen factores comunes (si los tienen podemos simplificarlos). Entonces $p^2 = 2q^2$ y p debe ser par, pues si no lo es, $p = 2k+1$ para algún entero k en este caso $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, lo cual es una contradicción pues teníamos que p^2 era par. Por tanto p es par, es decir, $p = 2k$, para algún k entero. Se sigue entonces de $p^2 = 2q^2$, que $q^2 = 2k^2$, y por los mismos argumentos de antes tenemos que q debe ser par. Luego p y q tienen como factor común a 2, lo cual es una contradicción con nuestro supuesto inicial que p y q no tienen factores comunes. En conclusión, x no puede ser racional y satisfacer que $x^2 = 2$. $\blacksquare$

El teorema 1.10.1 puede ser interpretado en términos algebraicos diciendo que la ecuación de segundo grado con coeficientes racionales $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$. Pero esta presentación tiene el inconveniente que agregando los números irracionales a $\mathbb{Q}$, no se soluciona el problema general de las ecuaciones de segundo grado, pues en $\mathbb{R}$, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tampoco tiene solución.

Teorema 1.10.2 Si m, n son números naturales primos entre sí y $n \neq 1$, entonces $\dfrac{m^2}{n^2}$ no es un número natural.

Demostración: Primero demostraremos lo siguiente: si $a, m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $\text{mcd}(m,n) = 1$ y $m|na$ entonces $m|a$. En efecto, como $\text{mcd}(m,n) = 1 \implies \exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $mx + ny = 1 \implies max + nay = a$ y como $m|m$ y $m|na \implies m|(max + nay) \iff m|a$.
Una consecuencia de lo anterior es que si p es primo tal que $p|ab \implies p|a$ o $p|b$, para $a, b \in \mathbb{Z}$.

Demostremos ahora nuestro teorema. Supongamos por contradicción que $\dfrac{m^2}{n^2} = a$ con $a \in \mathbb{N}$. Entonces $m^2 = an^2$ (1). Luego $m|(an)n \implies m|an \implies m|a$, pues $\text{mcd}(m,n) = 1$ y estamos en las condiciones de lo demostrado al principio. Así $a = mk$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Reemplazando en (1) tenemos que $m^2 = an^2 = mkn^2 \implies m = kn^2$. Usando el mismo argumento se tiene que $k = mk'$ para algún $k' \in \mathbb{N}$. Así $m = kn^2 = mk'n^2 \implies 1 = k'n^2 \implies k' = n^2 = 1 \implies n = 1$. $\blacksquare$

Como aplicación del teorema 1.10.2 tenemos la existencia de infinitos números no racionales: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, etc. Además, este mismo teorema nos dice que la operación de extraer raíz cuadrada no es cerrada en $\mathbb{Q}$. El teorema 1.9.7 nos muestra que en general las raíces son supremos de ciertos conjuntos de números racionales. Es decir, la insuficiencia de $\mathbb{Q}$ desde este punto de vista se arregla agregando a $\mathbb{Q}$ todos los supremos de todos los posibles conjuntos de racionales. Es por esta razón que todo conjunto acotado en $\mathbb{R}$ tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{R}$ y con esta propiedad no se necesita agregar más cosas y se logra la continuidad de $\mathbb{R}$.

Definición 1.10.3 Un número irracional es un número real no racional. Al conjunto de tales números lo denotaremos $\mathbb{I}$.

Figura 1.10.1: Espiral de irracionales

Teorema 1.10.4 (i) $\mathbb{I}$ no es cerrado para la suma, para la multiplicación y para la elevación a potencia.

(ii) Si $x \in \mathbb{I}$, $r \in \mathbb{Q}$, entonces $r + x \in \mathbb{I}$.

(iii) Si $x \in \mathbb{I}$, $r \in \mathbb{Q}$, entonces $rx \in \mathbb{I}$.

Demostración:

(i) $\pm\sqrt{3} \in \mathbb{I}$, pero $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in \mathbb{Q}$.
$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \in \mathbb{Q}$.
$(\sqrt{3})^2 = 3 \in \mathbb{Q}$.

(ii) Sea $x \in \mathbb{I}$, $r \in \mathbb{Q}$. Supongamos por contradicción que $r + x \in \mathbb{Q}$; es decir, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $r + x = q$, lo que implica que $x = q - r$ es a la vez un racional y un irracional, lo cual no puede ser.

(iii) Es análoga a (ii) $\blacksquare$

Teorema 1.10.5 (i) Si $y > 0$ es un número irracional y z es un real positivo, entonces existe un natural m tal que el número irracional $\dfrac{y}{m}$ satisface que $0 < \dfrac{y}{m} < z$.

(ii) Si x, y son números reales tales que $x < y$ y u es un irracional positivo, entonces existe un racional s tal que el irracional su satisface $x < su < y$.

(iii) $\mathbb{I}$ es denso.

(iv) $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$: si x, y son dos números reales distintos, entonces existe $z \in \mathbb{I}$ tal que $x < z < y$.

Demostración: (i) Como $y > 0$, $z > 0$, entonces por axiomas de orden $\frac{y}{z} > 0$. Usando la propiedad arquimediana, obtenemos la existencia de un número natural m tal que $0 < \frac{y}{z} < m$, por tanto $0 < \frac{y}{m} < z$. Que $\frac{y}{m}$ es número irracional es consecuencia del teorema 1.10.4 (iii).
(ii) Supongamos que x, u son positivos, entonces $\frac{x}{u} < \frac{y}{u}$, puesto que por hipótesis $x < y$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, teorema 1.8.3 (ii), existe un racional s tal que $\frac{x}{u} < s < \frac{y}{u}$. Por tanto, $x < su < y$. Por teorema 1.10.4 (iii), $su \in \mathbb{I}$.
Si x, y, u son negativos, se aplica lo recién demostrado a sus inversos aditivos, obteniendo la conclusión. Si x e y tienen signos distintos, entonces podemos aplicar lo anterior a x y 0 o a 0 e y.
(iii) $\mathbb{I}$ es denso es consecuencia de (ii) aplicada en particular a $x, y \in \mathbb{I}$, tomando como u un irracional particular que ya sabemos existen.
(iv) $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$, es otra forma de leer (ii). ■

Teorema 1.10.6 $\mathbb{I}$ no es continuo.

Demostración: Tal como el caso de $\mathbb{Q}$, como $\mathbb{I}$ es denso, para que no sea continuo, debe fallar el axioma del Supremo restringido a $\mathbb{I}$. Basta encontrar un conjunto de números irracionales cuyo supremo no esté en $\mathbb{I}$. Sea

$$A = \{-\frac{\sqrt{2}}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Por teorema 1.10.1, A es un conjunto no vacío. Cada elemento de A, en virtud del teorema 1.10.4 (iii), es un número irracional. Pero su supremo que es 0 no pertenece a $\mathbb{I}$. ■

Por cierto la definición 1.10.3 es la más práctica para nuestros objetivos, pero no dice mucho de la naturaleza misma de los números irracionales. Una verdadera construcción de estos números partiendo de la teoría de conjuntos y siguiendo progresivamente con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, requiere una definición más elaborada de número irracional. Existen dos formas de definirlos, una debida a G.Cantor mediante sucesiones de Cauchy y la otra, mediante cortaduras, idea de Dedekind, que a su vez se inspiró en la definición de proporción del griego Eudoxo. Sobre este tema el lector interesado puede consultar los libros de Suppes , Landau.

Otra idea falsa a la que podría inducir esta presentación es creer que todos los números irracionales surgen como raíces de otros números. Aunque esto no es verdad, mostrarlo a este nivel es imposible, pero números tan conocidos como π, e, son *números transcendentes*, es decir ellos no son solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. Que el número π es irracional se demostró en 1767 por J.H. Lambert y en 1882, Lindemann demostró que además él es transcendente. Una breve historia de π puede leerse en el libro de H. Eves, página 90.

Ejercicios resueltos

1. LLamaremos inecuación (respectivamente ecuación) racional a una inecuación (respectivamente ecuación) que contiene radicales.

   Resuelva la ecuación irracional

   $$\sqrt{x+6} + \sqrt{x+3} = \sqrt{5-x} + \sqrt{3x+4}.$$

   Solución: La ecuación tiene sentido si $x \geq -6,\ x \geq -3,\ x \leq 5,\ x \geq -\frac{4}{3}$. Es decir , podemos buscar soluciones cuando $\frac{4}{3} \leq x \leq 5$.

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado tenemos:

$$x+6+x+3+2\sqrt{(x+6)(x+3)} = 5-x+3x+4+2\sqrt{(5-x)(3x-4)}$$

Lo que se reduce a

$$\sqrt{(x+6)(x+3)} = \sqrt{(5-x)(3x-4)}$$

Usando propiedades de las raíces nos queda

$$(x+6)(x+3) = (5-x)(3x-4)$$

Efectuando los productos y reduciendo términos semejantes obtenemos la ecuación de segundo grado

$$2x^2 - x - 1 = 0,$$

que tiene las soluciones $x = 1$, $x = -\dfrac{1}{2}$, que pertenecen al intervalo de posibles soluciones.

2. Resuelva la inecuación irracional

$$x - 2 > \sqrt{-x^2+6x-5}.$$

Solución: Para que la desigualdad tenga sentido $\sqrt{-x^2+6x-5}$ debe ser un número real, para ello debemos tener

$$-x^2+6x-5 \geq 0,$$

lo que da $1 \leq x \leq 5$. Bajo esta restricción la desigualdad tiene sentido si $x-2>0$.

Entonces, si $2 < x \leq 5$, podemos elevar al cuadrado los dos miembros de la inecuación, quedando: $(x-2)^2 > -x^2+6x-5$, que es equivalente a $2x^2-10x+9>0$. Esta última inecuación tiene por solución

$$x < \frac{5-\sqrt{7}}{2} \text{ ó } \frac{5+\sqrt{7}}{2} < x.$$

Así, la inecuación dada tiene solución

$$\frac{5+\sqrt{7}}{2} < x \leq 5$$

.

3. resuelva la inecuación irracional

$$x + \sqrt{x^2-10x+9} > \sqrt{x+2\sqrt{x^2-10x+9}}.$$

Solución:

(a) $\sqrt{x^2-10x+9} \in \mathbb{R}$ si y sólo si $x^2-10x+9 = (x-9)(x-1) geq =$. Siguiendo el método descrio en el ejercicio resuelto 10 de la sección 1.3, esta desigualdad vale para $x \leq 1$ ó $x \geq 9$.

(b) Si $x \geq 9$, entonces $x+2\sqrt{x^2-10x+9} \geq 0$ y $x+\sqrt{x^2-10x+9} \geq= 0$. Por tanto, la desigualdad tiene sentido y podemos aplicar todas las reglas para resolver desigualdades.

$$\begin{aligned}
\left(x+\sqrt{x^2-10x+9}\right)^2 &> \left(\sqrt{x+2\sqrt{x^2-10x+9}}\right)^2\\
x^2+2x\sqrt{x^2-10x+9}+x^2-10x+9 &> x+2\sqrt{x^2-10x+9}\\
2x^2-11x+9 &> 2\sqrt{x^2-10x+9}(1-x)\\
(2x-9)(x-1) &> -2\sqrt{x^2-10x+9}(x-1)\\
2x-9 &> -2\sqrt{x^2-10x+9}, \text{ porque } x-1>0,
\end{aligned}$$

Como $x \geq 9$, entonces $2x - 9 \geq 0$. Además $-2\sqrt{x^2 - 10x + 9} \leq 0$, lo que implica que la desigualdad se cumple para todo $x \geq 9$.

(c) Si $x = 1$. Reemplazando este valor en la desigualdad llegamos a que $1 > 1$, por tanto, este valor no es solución.

(d) Si $x < 1$. Como $x+2\sqrt{x^2 - 10x + 9}$ debe ser positivo o nulo, entonces $x > -2\sqrt{x^2 - 10x + 9}$ en el caso que $x < 0$, pues cuando x es positivo se cumple trivialmente. $0 < -x < 2\sqrt{x^2 - 10x + 9}$, conduce a la inecuación

$$0 < 3x^2 - 40x + 36$$

, que se cumple para $x < 20 - 2\sqrt{73}$ ó $x > 20 + 2\sqrt{73}$. En consecuencia, tenemos que la desigualdad se cumple para $x < 1$.

En virtud del análisis de los diferentes casos tenemos que la solución a la desigualdad planteada es:

$$x < 1 \quad \text{ó} \;\; x \geq 9.$$

4. Demuestre que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ es un número irracional.

Solución: Sea $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3} = x$, entonces $\sqrt[3]{2} = \sqrt{3} + x$. Elevando ambos miembros de la ecuación al cubo se tiene

$$2 = x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}$$

$$2 - 9x - x^3 = 3\sqrt{3}(x^2 + 1)$$

$$4 - 36x - 4x + 81x^2 + 18x^4 + x^6 = 27(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$4 - 36x - 4x + 81x^2 + 18x^4 + x^6 = 27x^4 + 54x^2 + 27$$

$$x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23 = 0.$$

Según el ejercicio resuelto **??** de la sección 1.10, las posibles raíces racionales de esta ecuación son : $\pm 1, \pm 23$. Se puede verificar con un cálculo directo que ninguna de ellas lo es. Por tanto, sus raíces reales no son racionales. Como $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ satisface la ecuación, este es un número irracional.

5. Demuestre que cada elemento u_n de la sucesión de Fibonacci definida en el ejercicio resuelto 1 de la sección 1.8 pueder escrito como

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Solución:

Recordemos que

$$u_0 = 0, \;\; u_1 = 1, \;\; u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Usando el principio de inducción:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{(1+\sqrt{5})^0 - (1-\sqrt{5})^0}{2^0\sqrt{5}} = 0 \\ u_1 &= \frac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{2^1\sqrt{5}} = 1 \end{aligned}$$

Supongamos que la escritura vale para n y $n+1$:

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \\
&= = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}\left[1 + \frac{(1+\sqrt{5})^{n}}{2}\right] - \frac{(1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}\left[1 + \frac{(1-\sqrt{5})^{n}}{2}\right] \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}\frac{(1+\sqrt{5})^{2}}{2^{2}} - \frac{(1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}\frac{(1-\sqrt{5})^{2}}{2^{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2}\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

6. Demuestre que si el número real x satisface la ecuación $x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n = 0$, donde los c_i son enteros, entonces x es entero o x es irracional.

   Solución: Supongamos que $x = \dfrac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\operatorname{mcd}(a,b) = 1$.

   Si $b = 1$, entonces x es un entero. Supongamos que $b > 1$, entonces tenemos que:

   $$\frac{a^n}{b^n} + c_1\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots + c_{n-1}\frac{a}{b} + c_n = 0\ .$$

   Multiplicando por b^n obtenemos:

   $$a^n + c_1a^{n-1}b + \ldots + c_{n-1}ab^{n-1} + c_nb^n = 0\ ,$$

   de donde
   $$a^n = -b(c_1a^{n-1} + \ldots + c_{n-1}ab^{n-2} + c_nb^{n-1}).$$

   Por el teorema fundamental de la aritmética existe un divisor primo de b, llamémosle p, luego $p|a^n$ de donde $p|a$, lo que contradice que $\operatorname{mcd}(a,b) = 1$. Por lo tanto, x no es racional.

7. Exprese el número irracional $\sqrt{5}$ como una fracción continua infinita.

   Solución: $\sqrt{5}$ es solución de la ecuación

   $$x^2 - 5 = 0$$

   o equivalentemente
   $$x^2 - 4 = 1$$
   $$(x-2)(x+2) = 1$$

   de donde
   $$x - 2 = \frac{1}{x+2}$$
   $$x = 2 + \frac{1}{x+2}$$

   reemplazando sucesivamente el valor de x en el denominador de la fracción anterior, podemos escribir:

   $$x = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}}$$

8. Encuentre un método para aproximar $\sqrt{2}$ mediante números racionales .

   Solución:

   (a) Observemos que $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, por lo cual $\sqrt{2}$ es más cercano a 1 que a 2. Así podemos tomar como primera aproximación $a_1 = 1$.

   Si $a = \sqrt{2}$, entonces

   $$a = \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{a}$$

   lo que permite escribir que

   $$a + \frac{2}{a} = 2a,$$

   o lo que es lo mismo

   $$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = a.$$

   Esta fórmula sugiere un efectivo método de aproximación:

Primera estimación:	1
Segunda estimación:	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1,5.$
Tercera estimación:	$\frac{1}{2}\left(1,5 + \frac{2}{1,5}\right) = \frac{17}{12} = 1,4166.$
Cuarta estimación:	$\frac{1}{2}\left(1,4166 + \frac{2}{1,4166}\right) = \frac{577}{408} = 1,414215.$

   Este proceso es infinito, por tanto lo podemos detener una vez alcanzado el grado de exactitud deseado.

   Es interesante destacar que este método corresponde a una sucesión definida recursivamente por las relaciones:

   $$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right). \end{aligned}$$

   Veremos en los capítulos siguientes que efectivamente esta sucesión converge a $\sqrt{2}$.

   (b) Otro método para aproximar números irracionales.

   Usando las propiedades de las raíces tenemos que $4 < 5 < 9$ implica que $2 < \sqrt{5} < 3$.

   Como $(2,2)^2 = 4,4$ y $(2,3)^2 = 5,29$, tenemos que $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$.

   Como $(2,23)^2 = 4,9729$ y $(2,24)^2 = 5,0176$, tenemos que $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$.

   Además, $(2,236)^2 = 4,999696$ y $(2,237)^2 = 5,004169$, entonces $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.

   Nuevamente este proceso es infinito y se detiene según el grado de exactitud requerido.

9. Demuestre que la razón áurea es irracional. El rectángulo dorado de los griegos es tal que, *si uno corta un cuadrado de ese rectángulo, entonces el rectángulo que queda tiene la misma forma que el rectángulo inicial.* Entendiendo por *misma forma* que los rectángulos son semejantes, es decir, la razón entre el lado menor y el lado mayor es siempre la misma.

   Solución:

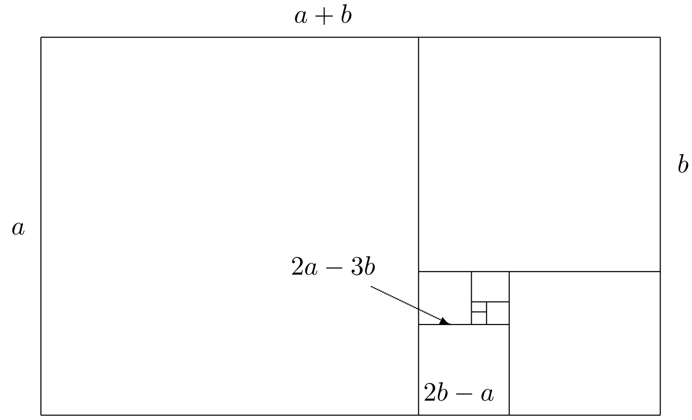


Figura 1.10.2: El rectángulo dorado.

Supongamos que el rectángulo dorado es de lados a y $a+b$ tal que $a>b$. Entonces, sacando el cuadrado de lado a, obtenemos el rectángulo de lados a y b. Sacando el cuadrado de lado b, obtenemos el rectángulo de lados b y $a-b$ y así se forma una sucesión de rectángulos de lados: $(a+b,a)$, (a,b), $(b,a-b)$, $(a-b,2b-a)$, $(2b-a,2a-3b)$, $(2a-3b,5b-3a)$, etc.

Nuevamente podemos observar que en cada rectángulo el lado más grande es la suma de los lados del rectángulo próximo.

La relación de semejanza se escribe como:

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}=\frac{1}{1+\dfrac{b}{a}},$$

llamando r a la razón $\dfrac{b}{a}$, tenemos que $r=\dfrac{1}{1+r}$, es decir, $r^2+r=1$, completando el cuadrado del binomio $r^2+r+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$, así $\left(r+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, por tanto $r+\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, pero como a y b son longitudes, debemos escoger el valor positivo de r, es decir,

$$r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Usando el ejercicio anterior $r\approx 0,6180...$ Note que r es la longitud del decágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Por otro lado, que r sea un número irracional nos dice que a y b son segmentos inconmensurables.

Ejercicios propuestos

1. Resuelva la ecuación irracional

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{20x+5}=0.$$

2. Resuelva

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}.$$

3. Resuelva

$$2x-1>\sqrt{x^2-3x+3}.$$

4. Resuelva
$$\sqrt[3]{2x^2+1} - \sqrt[3]{3x^2-1} < 0.$$

5. Pruebe que $\sqrt{3}+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

6. Generalizar el método del ejercicio resuelto 3 para encontrar un método para aproximar una raíz cuadrada no racional de un número natural.

7. Calcular una aproximación de $\sqrt{17}$.

8. Encuentre el número irracional que representa la fracción continua infinita
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

1.11 Intervalos reales: vecindades y topología de R

La topología general es el estudio de la continuidad y la convergencia . Estos conceptos serán desarrollados en los capítulos posteriores; por ahora definiremos los conceptos topológicos básicos relativos al conjunto $\mathbb{R}$. Si consideramos los números reales como puntos de una recta llamada recta real, la idea que queremos desarrollar es la de vecindad.

Definición 1.11.1 Llamaremos *intervalo abierto* a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ de una de las cuatro formas siguientes:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \\ (a,+\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\} \\ (-\infty,a) & = & \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\} \\ (-\infty,+\infty) & = & \mathbb{R} \end{array}$$

Llamaremos *intervalo cerrado* a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ de una de las cuatro formas siguientes:

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\} \\ [a,+\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\} \\ (-\infty,a] & = & \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq a\} \\ (-\infty,\infty) & = & \mathbb{R} \end{array}$$

Llamaremos *intervalos semiabiertos* (o *semicerrados*) a:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$$

El intervalo $[a,b)$ se dice también cerrado por la izquierda y abierto por la derecha y el intervalo $(a,b]$ abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.
Cualquiera de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos anteriormente se llaman intervalos y son los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que reciben ese nombre.
Observemos los siguientes hechos:

1) $(a,b) = \emptyset$ si y sólo si $b \leq a$.

2) $[a,b] = \{a\} = \{b\}$ si y sólo si $a = b$, por lo tanto diremos que un punto es cerrado en $\mathbb{R}$.

3) $\mathbb{R}$ es el único intervalo no vacío abierto y cerrado a la vez.

Definición 1.11.2 $A \subset \mathbb{R}$ se dice que es acotado si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < M, \;\; \forall x \in A$. En este caso se dice que M es una cota para A.

Obviamente si A es acotado A tiene infinitas cotas.
Los intervalos (a,b) , $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ son los únicos intervalos acotados. Los otros intervalos se dicen no acotados o ilimitados.
Sea I un intervalo acotado (es decir, I es uno de los cuatro tipos de arriba), entonces $\sup I = b$ e $\inf I = a$.
Sea I un intervalo acotado, entonces a se dice el extremo inferior de I y b el extremo superior de I.

Usualmente estos intervalos se gráfican, por ejemplo, como sigue:

Figura 1.11.1: Intervalos

Ejemplo 1.11.3

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < a\} &= (-a, a) \quad ; a > 0 \\
\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| \leq a\} &= [-a, a] \quad ; a > 0 \\
\{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\} &= (0, +\infty) \\
\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 \geq 1\} &= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\
\{x \in \mathbb{R} \,:\, -x^2 + 1 > 0\} &= (-1, 1)
\end{aligned}$$

Propiedades de los intervalos se verán con detalles en el Libro de problemas para cálculo en una variable, por ahora adelantemos algunas de ellas.

(1) Si I intervalo abierto, $I \neq \mathbb{R}$ entonces su complemento en $\mathbb{R}$, I^c, está formado por intervalos cerrados. En efecto,

$$\begin{aligned}
(a, b)^c &= (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \\
(-\infty, a)^c &= [a, +\infty) \\
(a, +\infty)^c &= (-\infty, a] \\
(-\infty, \infty)^c &= \emptyset \quad (\text{ Por lo tanto, } \emptyset \text{ por definición es abierto y cerrado a la vez}).
\end{aligned}$$

(2) La propiedad (1) es válida análogamente para los intervalos cerrados.

Dado $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. El problema de determinar si A es o no un intervalo no es simple. Tener un criterio para determinar esto es muy importante para estudiar los dominios y los recorridos de funciones. El siguiente lema caracteriza a un intervalo.

Lema 1.11.4 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío que satisface la siguiente propiedad:*
(*) *Si $x, y \in A$ con $x < y$ entonces $[x, y] \subset A$,*
entonces A es un intervalo.

Demostración: Si $A = \{x_0\}$, entonces A es un intervalo. Supongamos entonces que A contiene al menos dos puntos. Consideremos los cuatro casos posible.

(i) A es acotado. Sean $a = \inf A, b = \sup A$ luego, para todo $x \in A$, $a \leq x \leq b$, lo que implica que $x \in [a, b]$ para todo $x \in A$, es decir, $A \subset [a, b]$.

Demostremos ahora que $(a, b) \subset A$. Sea $x \in (a, b)$, entonces x no es cota inferior de A, por tanto existe $z \in A$ con $z < x$. También x no es cota superior de A, por tanto existe $w \in A$ tal que $x < w$. Por consiguiente, $x \in [z, w]$ y por la propiedad (*), tenemos $[z, w] \subset A$. como $x \in (a, b)$ es arbitrario y $x \in [z, w] \subset A$, concluimos que para todo $x \in (a, b)$, $x \in A$, por tanto, $(a, b) \subset A$. Si $a \notin A$ y $b \notin A$, se tiene $A = (a, b)$.

Si $a \notin A$ y $b \in A$, se tiene $A = (a, b]$.

Si $a \in A$ y $b \notin A$, se tiene $A = [a, b)$.

Si $a \in A$ y $b \in A$, se tiene $A = [a, b]$.

(ii) A es cotado superiormente, pero no inferiormente: Sea $b = \sup A$. si $x \in A$ entonces $x \leq b$, por lo tanto, $A \subset (-\infty, b]$. Demostremos ahora que $(-\infty, b) \subset A$. Sea $x \in (-\infty, b)$, por el argumento anterior, como x no es cota inferior de A existe $z \in A$ tal que $z < x$ y como tampoco es cota superior de A, existe $w \in A$ tal que $x < w$.Por tanto, $x \in [z, w]$ y por la propiedad (*) $[z, w] \subset A$, entonces $x \in A$, lo que implica que $(-\infty, b) \subset A$.

Si $b \notin A$, entonces se tiene $A = (-\infty, b)$. Si $b \in A$, entonces se tiene $A = (-\infty, b]$.

(iii) A es acotado inferiormente, pero no superiormente: Sea $a = \inf A$ y aplicando el mismo argumento de (ii), tenemos $A = (a, +\infty)$ si $a \notin A$ ó $A = [a, +\infty)$, si $a \in A$.

(iv) A no es acotado superiormenete ni inferiormente. Por el argumento anterios, dado $x \in \mathbb{R}$ existen $z, w \in A$ tal que $x \in [z, w] \subset A$ y por tanto, $\mathbb{R} \subset A$, entonces $A = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

por tanto, en cualesquiera de los casos, A es un intervalo. ■

Definición 1.11.5 Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Llamaremos *vecindad de* x_0 a un conjunto V que contiene un intervalo abierto I, el cual, a su vez, contiene a x_0.

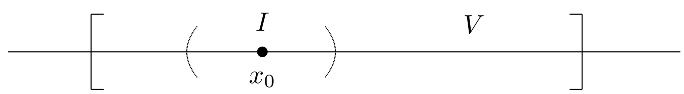


Figura 1.11.2: Vecindad de x_0

Siempre podemos suponer I acotado, más aún siempre podemos suponer $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ para algún $r > 0$. En efecto, si por ejemplo $I = (a, +\infty)$, entonces sea $b > x_0$ cualquiera y se tiene $(a, b) \subset I \subset V$ y $x_0 \in (a, b)$. Sea $r = \min\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\} > 0$. Entonces, es evidente por construcción:

$$x_0 \in (x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b) \subset I \subset V$$

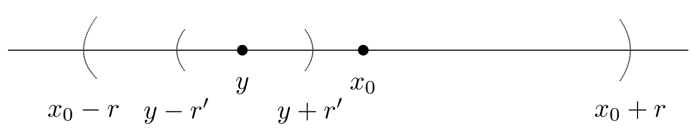
Supondremos, entonces, desde ahora que las vecindades de x_0 serán conjuntos de la forma:

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ -r < x - x_0 < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= (x_0 - r, x_0 + r). \end{aligned}$$

Una vecindad de $x_0, B(x_0, r)$, se llama usualmente *bola abierta de centro* x_0 *y radio* r.
Cuando se dice "existe una vecindad de x_0 contenida en V" significa : $\exists r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset V$.
Cuando se dice "para toda vecindad de x_0 contenida en V" significa : $\forall r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset V$.
Cuando se dice "No existen vecindades de x_0 contenidas en V" significa : $\forall r > 0$, $\exists y \in B(x_0, r)$ tal que $y \notin V$.

Teorema 1.11.6 Sea $B(x_0, r)$ una vecindad de x_0, entonces: Dado $y \in B(x_0, r)$ existe $r' > 0$ tal que $B(y, r') \subset B(x_0, r)$.

Demostración: Sea $y \in B(x_0, r)$, entonces $x_0 - r < y < x_0 + r$. Sea $r' \in \mathbb{R}$ tal que, $r' \leq \min\{(x_0 + r) - y, y - (x_0 - r)\}$



Entonces, si $z \in B(y, r')$, entonces $y - r' < z < y + r'$; pero $y - (y - (x_0 - r)) \leq y - r'$ por definición de r', es decir, $x_0 - r \leq y - r'$. Por otro lado también por definición de r' , $y + r' \leq y + (x_0 + r - y) = x_0 + r$. Por lo tanto, $x_0 - r \leq y - r' < z < y + r' \leq x_0 + r$, es decir, $z \in B(x_0, r)$. ■

Esta proposición es muy interesante y podemos leerla en la forma siguiente: Dado un intervalo abierto I y un punto x en él, entonces existe un subintervalo abierto J de I que contiene a x. Como esta propiedad es verdadera, para cualquier $x \in I$ sugiere que los puntos de I son "interiores" a I. En la siguiente definición precisaremos esto.

Definición 1.11.7 Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Entonces:

(1) x_0 es *punto interior de* A si $\exists r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$.

(2) x_0 es *punto exterior a* A si $\exists r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A^c$.

(3) x_0 es *punto frontera de* A si $\forall r > 0$ se tiene $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$.

(4) x_0 es *punto aislado de* A si $\exists r > 0$ tal que $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$.

(5) x_0 es *punto adherente a* A si $\forall r > 0$, $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

(6) x_0 es *punto de acumulación de* A si $\forall r > 0$, $(B(x_0, r) \backslash \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.

Denotaremos por: A^o = conjunto de puntos interiores de A , ∂A = conjunto de puntos frontera de A , $\overline{A}$ = conjunto de puntos de adherencia de A y A' = conjunto de puntos de acumulación de A. A^o se llama el *interior* de A , ∂A la *frontera* de A , $\overline{A}$ la *clausura o adherencia* de A y A' el *derivado* de A.

Ejemplo 1.11.8 a) $(a, b)^o = [a, b]^o = [a, b)^o = (a, b]^o = (a, b)$.

$\partial(a, b) = \partial[a, b] = \partial[a, b) = \partial[a, b) = \{a, b\}$.

$\overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{[a, b)} = \overline{(a, b]} = [a, b]$.

$(a, b)' = [a, b]' = [a, b)' = (a, b]' = [a, b]$.

b) Sea $A \subset \mathbb{R}$, entonces $A' \subset A^o \cup \partial A$. En efecto, sea $x \in A' \implies \forall r > 0$, $(B(x, r) \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Si $x \notin \partial A$, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $B(x, r_0) \cap A = \emptyset$ o bien existe $r_1 > 0$ tal que $B(x_0, r_1) \cap A^c = \emptyset$. Si $B(x, r_0) \cap = \emptyset$, entonces $(B(x, r_0) \backslash \{x\}) \cap A = \emptyset$, lo que no puede ser. Por lo tanto, $B(x_0, r_1) \cap A^c = \emptyset$, lo que implica $B(x_0, r_1) \subset A$, es decir, $x_0 \in A^o$. Esto demuestra $A' \subset \partial A \cup A^o$.

Observemos que si A no tiene puntos aislados, entonces $\overline{A} = \partial A \cup A^o = A'$.

c) Sea A el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$. $A = (1, 2) \cup (2, 3] \cup \{9/2\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} A^o &= (1, 2) \cup (2, 3) \\ \partial A &= \{1, 2, 3, 9/2\} \\ \overline{A} &= [1, 3] \\ A' &= [1, 3] \end{aligned}$$

Observe además que $\{9/2\}$ es el único punto aislado de A.

d) $\mathbb{R}^o = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^o = \emptyset$, $\mathbb{Z}^o = \emptyset$, $\partial\mathbb{R} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{Z} = \mathbb{Z}$,$\mathbb{R}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$,$\mathbb{Z}' = \emptyset$.

e) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no tienen puntos aislados debido a la densidad de estos conjuntos en $\mathbb{R}$. Sin embargo, *todos* los puntos de $\mathbb{Z}$ son aislados.

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = \dfrac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que $A^o = \emptyset$ y por la propiedad arquimediana $\partial A = \{0\} \cup A$, en efecto si $x = \dfrac{1}{n}$ entonces dado $\varepsilon > 0$ $B(\dfrac{1}{n}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (contiene al punto $\dfrac{1}{n}$) y $B(\dfrac{1}{n}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ (contiene los puntos y con $\dfrac{1}{n} - \varepsilon < y < \dfrac{1}{n}$). Si $x = 0$, dado $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, por lo tanto $B(0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(0, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ (contiene a 0).

Todos los puntos de A son aislados. En efecto, 1 es aislado pues $B(1, 1/2) \cap A = \{1\}$. Sea $\dfrac{1}{n} \in A$, $n > 1$ entonces $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n-1}$ y

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\right) \cap A =$$

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n(n+1)}\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

$\{0\}$ es el único punto de acumulación de A, pues $\forall r > 0$, $(B(0, r)\backslash\{0\}) \cap A \neq \emptyset$ por la propiedad arquimediana. Luego $A' = \{0\}$ y $\overline{A} = A \cup \{0\}$

Observación 1.11.9 1) Los puntos de acumulación serán de gran importancia en el concepto de límite de una función, pues sólo en ellos se puede definir este concepto.

2) No todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son intervalos. En efecto, construyamos el siguiente conjunto, llamado conjunto de *Cantor*. Sean $I_0 = [0, 1]$ dividamos I_0 en 3 intervalos de igual longitud y saquemos el intervalo abierto del medio, así formamos I_1, es decir:

$$I_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

dividamos cada uno de los intervalos de I_1 en tres partes iguales y saquemos de cada uno de ellos los intervalos centrales abiertos, así formamos I_2, es decir:

$$I_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

dividamos cada uno de los intervalos de I_2 en partes iguales y saquemos los intervalos centrales abiertos. Así se forma I_3 que es la unión de 8 intervalos:

$$I_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup \ldots \cup [\frac{26}{27}, 1]$$

así, en general, I_n está constituido de 2^n intervalos

$$I_n = [0, \frac{1}{3^n}] \cup \ldots \cup [\frac{3^n - 1}{3^n}, 1].$$

El conjunto de Cantor C se define como :

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

este conjunto satisface lo siguiente: C es *perfecto*, es decir, $C' = C$, lo que significa que, todos sus puntos son puntos de acumulación. C tiene interior vacío, $C^o = \emptyset$. C no contiene intervalos con más de un punto.

En el Libro de problemas para cálculo en una variable, abordaremos estos conjuntos de Cantor con más detalle y demostraremos que todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que satisface $A' = A$ y $A^o = \emptyset$ es un conjunto de Cantor. Además, estos conjuntos tienen *dimensión fraccionaria*, es decir, no son puntos (dimensión cero) ni son segmentos de rectas (dimensión uno). Estos conjuntos serán los llamados *conjuntos fractales* en la recta real.

Ejercicios resueltos

1. ¿Cuales de los siguientes intervalos, $(-4/3, 0), [-4/3, 0), [-4/3, 0], (-5, 5], (-2/3, 4], [-2/3, 4)$, son vecindades de $-2/3$?

   Solución: Los cuatro primeros intervalos son vecindades de $2/3$ pues contienen intervalos abiertos que a su vez contienen a $-2/3$, por ejemplo, en el primer caso $-2/3 \in (-1, -1/3) \subset (-4/3, 0)$.

   Los últimos dos intervalos no son vecindades de $-2/3$; pues $(-2/3, 4]$ no contiene a $-2/3$ y $[-2/3, 4)$ no contiene a un intervalo abierto que contiene a $-2/3$.

2. Sea $A = \{ \ a_n \ \in \ \mathbb{R} \ / \ a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \ \ , \ \ n \in \mathbb{N} \ \}$. Calcule $A^o, \overline{A}, A', \partial A$.

   Solución: $A^o = \emptyset, \overline{A} = A \cup \{-1, 1\} = \partial A, A' = \{-1, 1\}$.

3. Calcule $D^o, \overline{D}, D', \partial D$. para

$$D = \{ \ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \in \mathbb{R} \ \}$$

   Solución: Observemos que $x \in \mathbb{R}$ si y solo si $x^2 - 1 > 0$, es decir $x^2 > 1$. Por lo tanto: $D^o = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \ ; \ \overline{D} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \ ; \ D' = \overline{D} \ , \ \partial D = \{-1, 1\}$.

4. Demuestre:

   (a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

   (b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

   Solución:

   (a) Sea $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset, \Rightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap B \neq \emptyset$.

   (b) Sea $x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap \overline{A} \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

5. Demuestre las siguientes relaciones fundamentales:

   (a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} - A^o$.

   (b) $\overline{A} = A' \cup A = A' \cup \{$ puntos aislados $\}$.

   Solución: Usando con cuidado la lógica de conjuntos tenemos:

   (a) Sea $x \in \partial A \ \Leftrightarrow \ \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{A^c} \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{A}$ y $x \notin (\overline{A^c})^c \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{A}$ y $x \notin A^o$. (¿ Porque $(\overline{A^c})^c = A^o$)

   (b) Sea $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ x \in A$ o $\forall r > 0, (B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \ \Leftrightarrow$ Existe $\xi > 0, (B(x, \xi) \cap A = \{x\})$ o $\forall r > 0, (B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

6. Demuestre

   (a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

   (b) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$ y que en general el recíproco es falso.

Solución:

(a) Sea $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow \forall r > 0, (B(x,r) - \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall r > 0, (B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ o $(B(x,r) - \{x\}) \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$.

(b) Sea $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow \forall r > 0, (B(x,r) - \{x\}) \cap (A \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow \forall r > 0, (B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ y $(B(x,r) - \{x\}) \cap B \neq \emptyset$

El recíproco de esta última proposición no es verdad en general. Veamos un ejemplo:

Sea $A = (0,1), B = (1,2)$. Entonces $A' = [0,1]$ y $B' = [1,2]$; por lo tanto $A' \cap B' = \{1\}$ pero $(A \cap B)' = \emptyset$.

7. Demostrar que:

(a) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

(b) Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, demostrar que se verifica la igualdad en (a).

Solución:

(a) Sea $x \in \partial(A \cup B)$ entonces por ejercicio 6 parte (a) $x \in \overline{A \cup B} \;\cap\; \overline{(A \cup B)^c} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{B^c} \cap \overline{A^c}$ (¿Porque esta desigualdad?). Por lo tanto $x \in (\overline{A} \cap \overline{B^c} \cap \overline{A^c}) \cup (\overline{B} \cap \overline{B^c} \cap \overline{A^c}) = (\partial A \cap \overline{B^c}) \cup (\partial B \cap \overline{A^c})$. Esto implica que $x \in \partial A \cup \partial B$.

(b)

$$
\begin{aligned}
\partial A \cup \partial B &= (\overline{A} \cap \overline{A^c}) \;\cup\; (\overline{B} \cap \overline{B^c}) \\
&= [(\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cup \overline{B}] \;\cap\; [(\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cap \overline{B^c}] \\
&= [(\overline{A} \cup \overline{B}) \;\cap\; (\overline{A^c} \cup \overline{B})] \;\cap\; [(\overline{A} \cup \overline{B^c}) \cap (\overline{A^c} \cup \overline{B^c}]
\end{aligned}
$$

y por hipótesis $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, luego se verifica $\overline{A} \subset (\overline{B})^c \subset B^c \subset \overline{B^c}$. y $\overline{B} \subset (\overline{A})^c \subset A^c \subset \overline{A^c}$.
Entonces $\mathbb{R} = \emptyset^c = (\overline{A} \cap \overline{B})^c = \overline{A}^c \cup \overline{B}^c \subset \overline{A^c} \cup \overline{B^c}$ esto implica que $R = \overline{A^c} \cup \overline{B^c}$. Luego:
$\partial A \cup \partial B = (\overline{A} \cup \overline{B}) \;\cap\; \overline{A^c} \cap \overline{B^c} = \overline{A \cup B} \;\cap\; \overline{A^c} \;\cap\; \overline{B^c}$
$= (\overline{A \cup B}) \;\cap\; (\overline{A^c \cap B^c}) = \overline{A \cup B} \;\cap\; \overline{(A \cup B)^c} = \partial(A \cup B)$.

8. Demuestre que en un conjunto finito se tiene $A' = \emptyset$.

Solución: Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Si $x_0 \in A'$, entonces sea $r < |a_i - x_0|$ $i = 1, 2, ..., n$ y $a_i \neq x_0$, luego $(B(x_0, r) - \{x_0\}) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto no puede existir $x_0 \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de A.

9. Demuestre que en un conjunto infinito y acotado se tiene $A' \neq \emptyset$

Solución: Este resultado no trivial es conocido como *Teorema de Bolzano-Weiertrass* y se demuestra usando el concepto de límite. Demos una idea geométrica de esta demostración.

Sea $d = SupA - InfA > 0$. Entonces $[InfA, InfA + d/2] \cap A$ o bien $[SupA - d/2, SupA] \cap A$ tiene infinitos puntos. Supongamos sin perder generalidad que $A_1 = [InfA, InfA + d/2] \cap A$ tiene infinitos puntos. Volvamos a dividir este conjunto por la mitad y tenemos que $[InfA, InfA + d/4] \cap A$ o bien $[InfA + d/4, InfA + d/2] \cap A$ tiene infinitos puntos. Llamemos A_2 a uno de estos conjuntos con infinitos puntos. Entonces $A_1 \supset A_2$. Asi dividiendo por la mitad y considerando cada ves un conjunto con infinitos puntos, se puede construir $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset ..... \supset A_n$ con A_n con infinitos puntos. El paso clave es demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, mas aún se puede probar que esta intersección solo contiene un punto, y este es un punto de acumulación de A.

Relacione este argumento con el primer problema propuesto.

10. ¿ Existen otros tipos de Conjuntos de Cantor?

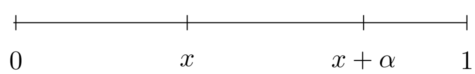
Solución: Sí, daremos una idea de estos tipos de conjuntos, que en el *Libro de problemas para cálculo en una variable* desarrollaremos con detalle; pero es interesante conocerlos desde ya.

(a) *Cantor numéricos* Para $k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ sea:

$C_k = \{x \in [0, 1] \ / \ x = 0, a_1a_2a_3...($ desarrollo decimal de $x)$ donde $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\} - \{k\}\}$

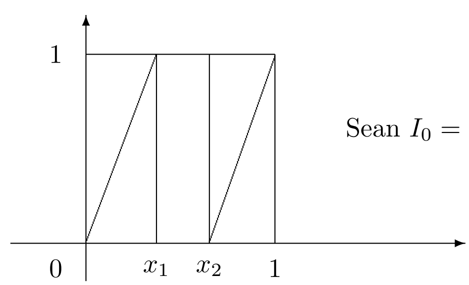
Estos conjuntos satisfacen $C_k' = C_k$ y ${C_k}^o = \emptyset$.

(b) *Cantor centrales* Sea $0 < \alpha < 1$. Dividamos el intervalo $[0, 1]$ en tres intervalos cerrados como lo indica la figura siguiente



Saquemos el intervalo central y subdividamos cada uno de los intervalos laterales en tres intervalos manteniendo la misma proporción que la primera división. Este proceso puede continuar indefinidamente y el conjunto que resulta al intersectar los intervalos que permanecen es un conjunto K que satisface $K' = K$ y $K^o = \emptyset$.

(c) *Cantor dínamicamente definidos* Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ función definida sobre el intervalo $[0, 1]$ cuyo gráfico es como la figura siguiente:



Sean $I_0 = [0, x_1]$ y $I_1 = [x_2, 1]$

f no esta definida para $x \in (x_1, x_2)$.
Si se define $f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), ..., f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{x \in I_0 \cup I_1 \ / \ f^n(x) \in I_0 \cup I_1 \ \forall n \geq 0\} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I_0 \cup I_1) \ \text{ con } f^{-n}(x) = (f^n)^{-1}(x). \end{aligned}$$

Es un conjunto que satisface $\Lambda' = \Lambda$ y $\Lambda^o = \emptyset$.

Ejercicios propuestos

1. Sean $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...a_n \leq a_{n+1} \leq ...$ y $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq ... \geq b_n \geq b_{n+1}..$ dos sucesiones de números reales con $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Sea $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Demuestre:

   (a) $K \neq \emptyset$

   (b) K tiene un único elemento o es un intervalo cerrado no trivial.

   (c) Si $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$. ¿Es válido (a) y (b) ? Dé ejemplos.

2. Dé ejemplos en $\mathbb{R}$ de conjuntos que no sean intervalos y no puedan escribirse como uniones numerables o intersecciones numerables de intervalos.

3. Encuentre los puntos definidos en 1.11.6 para el conjunto de Cantor construido en 1.11.8.

4. $A \subset \mathbb{R}$ se dice un *conjunto abierto* si $A \subset A^0$, es decir, todos los puntos de A son puntos interiores a A.

   Demuestre que si A_i son conjuntos abiertos $\forall i \in I$, I un conjunto de índices. Entonces, $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto. Esto significa que uniones arbitrarias de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos.

   Si $A_1, ..., A_n$ son conjuntos abiertos, demuestre que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un conjunto abierto. Esto significa que intersecciones finitas de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos.

   Dé un ejemplo que ponga en evidencia la falsedad de la proposición "intersecciones arbitrarias o numerables de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos."

5. $A \in \mathbb{R}$ se dice un *conjunto cerrado* si $\overline{A} \subset A$. Es decir A contiene a todos sus puntos de acumulación.

   Demuestre que si $A_1, ..., A_n$ son conjuntos cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es un conjunto cerrado. Esto significa que uniones finitas de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados.

   Demuestre que si A_i son conjuntos cerrados $\forall i \in I$, I un conjunto de índices. Entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un conjunto cerrado. Esto significa que intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados.

   Dé un ejemplo que ponga en evidencia la falsedad de la proposición "uniones arbitrarias o numerables de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados."

6. Demuestre que para todo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene:

   $\overline{A^c} = (A^o)^c \qquad (\overline{A})^c = (A^c)^o \qquad \partial A = \overline{A} \bigcap \overline{(A^c)}$. Por lo tanto, la frontera es un conjunto cerrado.

7. ¿Se puede aplicar el lema 1.11.4 para demostrar que el conjunto de Cantor no es un intervalo?

8. Demuestre que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 \leq 2\}$ es un intervalo.

1.12 Bibliografía

1. A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y otros : *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Alianza. 1985.
2. G. Bobadilla y J. Billeke : *Libro de Problemas para Cálculo en una Variable* . En preparación.
3. M. Cotlar y C. Ratto de Sadosky : *Introducción al Algebra. (Nociones de Algebra Lineal).* Ediciones Universitarias de Buenos Aires. 1962.
4. R. Courant y H. Robbins : *¿Qué es la Matemática ?* Aguilar. 1960
5. H. Eves :*An Introduction to the History of Mathematics.* Rinehart. 1960.
6. A. A. Fraenkel : *Abstract Set Theory* . North Holland . 1968.
7. H. S. Hall and S. R. Knight : *Algebra Superior* . Hispano Americana. 1969.
8. P. H. Halmos: *Naive Set Theory.* Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1960.
9. T.L. Heath :*The Thirteen Books of Euclide's Elements.* Cambridge University Press (1908). Reimpresión Dover (1956).
10. E. Landau : *Foundations of Analysis.* Chelsea. 1929.
11. W. Leveque: *Elementary Theory of numbers.* Addison-Wesley. 1962. Inc. N. York. 1990.
12. W. Leveque: *Topics in Numbers Theory.* Addison-Wesley. 1956.
13. E. McShane and T. Botts :*Real Analysis.* Van Nostrand. 1959.
14. I.Niven: *Irrational Numbers.* John Wiley and Sons. 1967.
15. R. Noriega: *Cálculo Diferencial e Integral.* Editorial Docencia S.A. Buenos Aires. 1979.
16. A. Pettofrezzo: and D.R. Byrkit: *Elements of Numbers Theory.* Prentice-Hall. 1970.
17. P. Suppes : *Axiomatic Set Theory.* Van Nostrand. 1961.
18. M. Spivak : *Calculus.* Reverté. 1970.
19. I. Vinogradov : *Elements of Numbers Theory.* Dover Publications. 1954.
20. L. Zippin : *Uses of Infinity.* The Mathematical Association of America. 1962.