

La presentación axiomática del conjunto de los números reales, caracterizado como un cuerpo ordenado y completo.

Prof: Gladys Bobadilla A.
24 abril 2020

Presentaremos una breve descripción en qué consiste una teoría axiomática.

Según¹, el método axiomático es un modo de exposición de las ciencias exactas basado en proposiciones admitidas sin demostración, claramente formuladas y razonamientos lógicos rigurosos. La axiomática comienza por un inventario exhaustivo de todas las proposiciones que se aceptan sin demostración y que no son definiciones; estas proposiciones se llaman axiomas, y constituyen el punto de partida de la teoría que se quiere construir. Entre los axiomas de una teoría figuran las reglas de deducción (axiomas de la lógica), que son comunes a todas las ciencias deductivas. A partir de estos datos, se deben demostrar otros resultados o teoremas de la teoría considerada, rechazando todo lo que no es deducido a partir de los axiomas, en particular todo recurso a la experiencia sensible o aspectos subjetivos.

Las palabras, signos o términos que intervienen en la redacción de los axiomas están desprovistas del significado que ellas puedan tener en el lenguaje corriente. No se tiene en consideración la realidad metafísica de los objetos matemáticos, solo importa las relaciones que explícitamente precisan los axiomas.

Los orígenes de la axiomática considerada como modelo ideal de redacción de un tratado científico es una concepción que se remonta a la matemática griega, los Elementos de Euclides, siglo 3 AC, constituye el primer escrito conocido que usa esta metodología.

Por ejemplo, en la formulación axiomática de la geometría, realizada por David Hilbert, no se definen los objetos matemáticos: punto, recta, plano, tampoco las palabras incidencia o entre. Ellas quedan determinadas por los axiomas. Ejemplo de esto es el conocido axioma: Dos puntos distintos determinan una única recta.

En palabras más simples, en los axiomas dados para una cierta teoría se puede hacer unas diferencias: como lo que suele llamarse conceptos no definidos, llamados conceptos primitivos; en el caso de la geometría son las palabras punto, recta, plano, entre otras. Las relaciones que son las mínimas que pueden caracterizar los conceptos primitivos son los axiomas propiamente.

Un sistema de axiomas debe cumplir algunos requisitos para que puedan sustentar la respectiva teoría.

Los axiomas deben ser compatibles, es decir su aplicación, respetando las reglas de la lógica, no deben conducir a contradicciones. Los axiomas deben ser independientes, lo que es equivalente a decir que ninguno de ellos es consecuencia de los otros.

Una gran dificultad de los cursos de matemática es aprender a demostrar. De ahora en adelante cuando digamos axiomas entenderemos que comprende los conceptos primitivos y los axiomas propiamente.

¹<https://www.universalis.fr/encyclopedie/axiomatique/>

Para no olvidar

EN MATEMÁTICA TODO RESULTADO PARA SER USADO DEBE SER DEMOSTRADO.

Puesto que todo se deduce, con las reglas de la lógica, a partir de los axiomas, daremos un esquema abstracto de una demostración. Una proposición matemática es una sentencia que puede ser demostrada o refutada. En este contexto, se dice que una proposición es verdadera cuando ella es demostrada.

Para refutar una proposición basta mostrar un caso en que ella no se cumple, esto se llama contraejemplo.

Las reglas básicas de la lógica son:

- El principio de Identidad: A es A , todo objeto es igual así mismo. En nuestro caso es tener una proposición conocida que es lo que es y no otra cosa.
- El principio de no contradicción. Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez.
- El principio del tercer excluido: dada una proposición ella es verdadera o falsa. No hay una tercera opción.

En el curso de álgebra verán un poco más de lógica, sobre todo las reglas de inferencia. El esquema de una demostración es:

HIPÓTESIS Consiste en una o más proposiciones conocidas (verdaderas).

TESIS Es la proposición cuya validez debe ser demostrada.

DEMOSTRACIÓN Uso de teoremas conocidos y reglas de inferencia lógica para obtener que la tesis es verdadera. Esta demostración se escribe en notación lógica como

s

$$H \implies T$$

Dadas dos proposiciones H y T :

- Un teorema directo es el resultado de una demostración directa que obedece al esquema $H \implies T$. También se dice que H es condición suficiente para T .
- Si también el teorema $T \implies H$ se demuestra, este se llama teorema recíproco de H implica T . En ese caso se usa la expresión H es una condición necesaria para T .
- El teorema resultante de una demostración $(\text{negación de } H) \implies (\text{negación de } T)$, se llama teorema contrario o contrapuesto. Por el principio del tercer excluido es equivalente a T implica H .
- El teorema resultante de una demostración $(\text{negación de } T) \implies (\text{negación de } H)$, se llama teorema contra recíproco. Por el principio del tercer excluido es equivalente al teorema directo H implica T . Esta equivalencia lógica da una alternativa para demostrar un teorema directo. Esta técnica se llama **reducción al absurdo**.

Dadas dos proposiciones P y Q , el símbolo:

Doble implicación

$P \iff Q$ representa dos implicaciones o teoremas $\left\{ \begin{array}{l} P \implies Q \\ \text{y} \\ Q \implies P \end{array} \right.$