UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22212 Álgebra III - Ayudantía 01

Producto Interno

Lunes 09 de Septiembre de 2019

1.1. Definición de Producto Interno

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ***producto interno sobre*** V si se cumple que:

(1) $\forall x \in V\ :\ \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}^+$ (positividad) y $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_V$

(2) $\forall x, y \in V\ :\ \langle x, y\rangle\ =\ \langle y, x\rangle$ (simetría)

(3) $\forall x, y \in V\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ :\ \langle \alpha x, y\rangle\ =\ \alpha\langle x, y\rangle$ (homogeneidad)

(4) $\forall x, y, z \in V\ :\ \langle x + z, y\rangle\ =\ \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$ (aditividad)

1.2. Ejercicios:

1. Si en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ se define la función $\langle (a, b), (c, d)\rangle\ =\ ac + ad + bc + bd$. Demuestre que ella es un producto interno.
2. Mismo para la función $\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac - ad - bc + 4bd$
3. Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que la función en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por $\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac - 3ad - 3bc + (k)bd$ sea un producto interno.
4. Definir un producto interno en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tal que $\langle (1, 0), (0, 1)\rangle =$ -2 , $\langle (1,0),(1,0)\rangle = 1$, $\langle (0,1),(0,1)\rangle = 5$
5. Si en $\mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x]$ y considerando que $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x$ y $r(x) = c_0 + c_1x$, se define la función $\langle p(x), q(x)\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1$. Demuestre que ella es un producto interno.
6. Si en $\mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ se define la función $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$. Demuestre que ella es un producto interno.
7. Si en $\mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ se define la función $\langle p(x), q(x)\rangle\ =\ \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Demuestre que ella es un producto interno.
8. Si en $M_{\mathbb{R}}(2) \times M_{\mathbb{R}}(2)$ se define la función $\langle A, B\rangle\ =\ tr(B^tA)$. Demuestre que ella es un producto interno.
9. (*) Si en $M_{\mathbb{R}}(n) \times M_{\mathbb{R}}(n)$ se define la función $\langle A, B\rangle = tr(B^tA)$. Demuestre que ella es un producto interno.
10. (*) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno. Demostrar que si $\forall v \in V\ :\ \langle u, v\rangle = 0$, entonces $u = 0_V$.
11. (*) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno. Demostrar que si $\forall w \in V\ :\ \langle u - v, w\rangle = 0$, entonces $u = v$.

Una solución a los Ejercicios:

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019

1) Positividad:

$$\langle (a,b),(a,b)\rangle = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$= (a+b)^2 \geq 0 \qquad \therefore, \boxed{\langle (a,b),(a,b)\rangle \geq 0}$$

Por propiedades de números reales, $(a+b)^2 = 0 \Longrightarrow (a+b) = 0$
$\Longrightarrow \boxed{a = -b}$

Entonces, el vector $(-3,3)$ es tal que:

$$\langle (-3,3),(-3,3)\rangle = (-3+3)^2 = 0^2 = 0 //.$$

$\therefore$, la función dada no es producto interno.

---

2) Positividad:

$$\langle (a,b),(a,b)\rangle = a^2 - ab - ab + 4b^2$$
$$= (a^2 - 2ab + b^2) + 3b^2$$
$$= (a-b)^2 + 3b^2 \geq 0 \qquad \therefore, \boxed{\langle (a,b),(a,b)\rangle \geq 0}$$

Por propiedades de números reales: $(a-b)^2 + 3b^2 = 0$

$$\Longleftrightarrow (a-b)^2 = 0 \wedge b^2 = 0$$
$$\Longleftrightarrow a - b = 0 \wedge \boxed{b = 0}$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{a = b} \wedge \boxed{b = 0}$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{a = 0 \wedge b = 0}$$

$$\therefore, \boxed{\langle (a,b),(a,b)\rangle = 0 \Longleftrightarrow (a,b) = (0,0)}$$

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019

* Simetría:

$$\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac-ad-bc+4bd$$
$$= ca-cb-da+4db$$
$$= \langle (c,d),(a,b)\rangle \checkmark$$

* Homogeneidad:

$$\langle \alpha(a,b),(c,d)\rangle = \langle (\alpha a,\alpha b),(c,d)\rangle$$
$$= \alpha ac-\alpha ad-\alpha bc+4\alpha bd$$
$$= \alpha(ac-ad-bc+4bd)$$
$$= \alpha\langle (a,b),(c,d)\rangle \checkmark$$

* Aditividad:

$$\langle (a,b)+(c,d),(e,f)\rangle = \langle (a+c,b+d),(e,f)\rangle$$
$$= (a+c)e-(a+c)f-(b+d)e+4(b+d)f$$
$$= ae+ce-af-cf-be-de+4bf+4df$$
$$= (ae-af-be+4bf)+(ce-cf-de+4df)$$
$$= \langle (a,b),(e,f)\rangle+\langle (c,d),(e,f)\rangle \checkmark$$

$\therefore$, la función dada es producto interno.

---

③ * Positividad: la revisaremos al final.

* Simetría:

$$\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac-3ad-3bc+kbd$$
$$= ca-3da-3cb+kdb$$
$$= \langle (c,d),(a,b)\rangle \checkmark$$

* Homogeneidad:

$$\langle \alpha(a,b),(c,d)\rangle = \langle (\alpha a,\alpha b),(c,d)\rangle$$
$$= \alpha ac-3\alpha ad-3\alpha bc+k\alpha bd$$
$$= \alpha(ac-3ad-3bc+kbd)$$
$$= \alpha\langle (a,b),(c,d)\rangle \checkmark$$

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019

* Aditividad:

$$\langle (a,b)+(c,d),(e,f)\rangle = \langle (a+c,b+d),(e,f)\rangle$$
$$= (a+c)e - 3(a+c)f - 3(b+d)e + k(b+d)f$$
$$= ae + ce - 3af - 3cf - 3be - 3de + kbf + kdf$$
$$= (ae - 3af - 3be + kbf) + (ce - 3cf - 3de + kdf)$$
$$= \langle (a,b),(e,f)\rangle + \langle (c,d),(e,f)\rangle \checkmark$$

* Positividad:

$$\langle (a,b),(a,b)\rangle = a^2 - 3ab - 3ab + kb^2$$
$$= a^2 - 6ab + kb^2$$

(i) $b=0 \implies \langle (a,0),(a,0)\rangle = a^2 \geq 0$

(ii) $b \neq 0$ $\quad a^2 - 6ab + kb^2 \geq 0 \quad / \cdot \frac{1}{b^2} > 0$

$$\implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + k \geq 0$$
$$\implies \Delta = 36 - 4k \leq 0$$
$$\implies 9 - k \leq 0$$
$$\implies \boxed{9 \leq k}$$

$x^2 - 6x + k = 0$
$\implies x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-4k}}{2}$
$\implies x = 3 \pm \sqrt{\dfrac{36-4k}{4}}$
$\implies x = 3 \pm \sqrt{9-k}$

$\therefore$, si $k \geq 9$, la función dada será producto interno.

OBS: * $\langle (a,b),(a,b)\rangle = 0 \wedge k \geq 9$

$$\implies a^2 - 6ab + kb^2 = (a^2 - 6ab + 9b^2) + (k-9)b^2$$
$$= (a-3b)^2 + (k-9)b^2 = 0$$
$$\implies (a-3b)^2 = 0 \wedge (k-9)b^2 = 0$$
$$\implies \boxed{a = 3b} \wedge \boxed{b = 0} \implies \boxed{a = b = 0}$$

* $\langle (0,0),(0,0)\rangle = 0$

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019

4) Dadas las condiciones pedidas, se debe tener (considerar $e_1=(1,0)$ y $e_2=(0,1)$):

* $\langle e_1, e_2\rangle = -2$
* $\langle e_1, e_1\rangle = 1$
* $\langle e_2, e_2\rangle = 5$
* $\langle\ ,\ \rangle$ debe ser producto interno (positivo, simétrico, aditivo y homogéneo).

Primero exigiremos que sea simétrico, aditivo y homogéneo.
La primera consecuencia de ello es $\boxed{\langle e_2, e_1\rangle = -2}$.
Si suponemos estas tres propiedades y desarrollamos el producto interno entre $x=(x_1,x_2)=x_1e_1+x_2e_2$
e $y=(y_1,y_2)=y_1e_1+y_2e_2$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \langle x_1e_1+x_2e_2, y_1e_1+y_2e_2\rangle && /\text{Aditivo}\\
&= \langle x_1e_1, y_1e_1+y_2e_2\rangle + \langle x_2e_2, y_1e_1+y_2e_2\rangle && /\text{Homogéneo}\\
&= x_1\langle e_1, y_1e_1+y_2e_2\rangle + x_2\langle e_2, y_1e_1+y_2e_2\rangle && /\text{Simétrico}\\
&= x_1\langle y_1e_1+y_2e_2, e_1\rangle + x_2\langle y_1e_1+y_2e_2, e_2\rangle && /\text{Aditivo}\\
&= x_1(\langle y_1e_1, e_1\rangle + \langle y_2e_2, e_1\rangle) + x_2(\langle y_1e_1, e_2\rangle + \langle y_2e_2, e_2\rangle && /\text{Homogéneo}\\
&= x_1(y_1\langle e_1,e_1\rangle + y_2\langle e_2,e_1\rangle) + x_2(y_1\langle e_1,e_2\rangle + y_2\langle e_2,e_2\rangle)\\
&= x_1(y_1-2y_2) + x_2(-2y_1+5y_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle x,y\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 + -2x_2y_1 + 5x_2y_2}$$

Ahora solamente falta verificar la positividad:

$$\begin{aligned}
\langle x,x\rangle &= x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2\\
&= (x_1 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) + x_2^2\\
&= (x_1-2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0 \qquad \therefore,\ \boxed{\langle x,x\rangle \geq 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x,x\rangle = 0 &\iff (x_1-2x_2)^2 + x_2^2 = 0\\
&\iff x_1 = 2x_2 \wedge x_2 = 0\\
&\iff x_1 = 0 \wedge x_2 = 0\\
&\iff x = (0,0)
\end{aligned}$$

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019

5 $p(x) = a_0 + a_1 x$, $q(x) = b_0 + b_1 x$ $\quad r(x) = c_0 + c_1 x$

$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + 2 a_1 b_1$

* Positividad:

$\langle p, p \rangle = a_0^2 + 2a_1^2 \geq 0$ ✓

$\langle p, p \rangle = 0 \iff a_0^2 + 2a_1^2 = 0 \iff a_0 = 0 \wedge a_1 = 0 \iff p(x) = 0$ ✓

* Simetría:

$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 = b_0 a_0 + 2 b_1 a_1 = \langle q, p \rangle$ ✓

* Homogeneidad:

$\langle \alpha p, q \rangle = \alpha a_0 b_0 + 2\alpha a_1 b_1 = \alpha (a_0 b_0 + 2 a_1 b_1) = \alpha \langle p, q \rangle$ ✓

* Aditividad:

$$\begin{aligned}\langle p+q, r \rangle &= (a_0 + b_0) c_0 + 2(a_1 + b_1) c_1 \\ &= a_0 c_0 + b_0 c_0 + 2a_1 c_1 + 2 b_1 c_1 \\ &= (a_0 c_0 + 2 a_1 c_1) + (b_0 c_0 + 2 b_1 c_1) \\ &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle \end{aligned}$$ ✓

$\therefore$, la función dada es producto interno.

---

6 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ $\quad r(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

$p(0) = a_0$ $\quad q(0) = b_0$ $\quad r(0) = c_0$

$p(1) = a_0 + a_1 + a_2$ $\quad q(1) = b_0 + b_1 + b_2$ $\quad r(1) = c_0 + c_1 + c_2$

$p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2$ $\quad q(2) = b_0 + 2b_1 + 4b_2$ $\quad r(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2$

$\langle p, q \rangle = p(0) q(0) + p(1) q(1) + p(2) q(2)$

* Positividad:

$\langle p, p \rangle = a_0^2 + (a_0 + a_1 + a_2)^2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2)^2 \geq 0$ ✓

$$\begin{aligned}\langle p, p \rangle = 0 &\iff a_0^2 + (a_0 + a_1 + a_2)^2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2)^2 = 0 \\ &\iff a_0 = 0 \wedge a_0 + a_1 + a_2 = 0 \wedge a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ &\iff a_1 + a_2 = 0 \wedge 2a_1 + 4a_2 = 0 \wedge a_0 = 0 \\ &\iff a_1 = -a_2 \wedge -2a_2 + 4a_2 = 0 \wedge a_0 = 0 \\ &\iff a_1 = -a_2 \wedge 2a_2 = 0 \wedge a_0 = 0\end{aligned}$$

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019

$\Leftrightarrow a_1 = -a_2 \wedge a_2 = 0 \wedge a_0 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$\Leftrightarrow p(x) = 0$ ✓

* <u>Simetría</u>: $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$
$= q(0)p(0) + q(1)p(1) + q(2)p(2)$
$= \langle q, p \rangle$ ✓

* <u>Homogeneidad</u>:

$\langle \alpha p, q \rangle = \alpha p(0)q(0) + \alpha p(1)q(1) + \alpha p(2)q(2)$
$= \alpha (p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2))$
$= \alpha \langle p, q \rangle$ ✓

* <u>Aditividad</u>:

$\langle p+q, r \rangle = (p(0)+q(0))r(0) + (p(1)+q(1))r(1) + (p(2)+q(2))r(2)$
$= p(0)r(0) + q(0)r(0) + p(1)r(1) + q(1)r(1) + p(2)r(2) + q(2)r(2)$
$= (p(0)r(0) + p(1)r(1) + p(2)r(2)) + (q(0)r(0) + q(1)r(1) + q(2)r(2))$
$= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$ ✓

$\therefore$, la función dada es un producto interno.

---

(7) * <u>Positividad</u>:

$\langle p, p \rangle = \int_0^1 (p(x))^2 dx \geq 0$ ✓ / Si $f(x) \geq 0$, entonces $\int f(x)dx \geq 0$

$\langle p, p \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (p(x))^2 dx = 0 \Leftrightarrow p(x)^2 = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$ ✓

* <u>Simetría</u>:

$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 q(x)p(x)dx = \langle q, p \rangle$ ✓

* <u>Homogeneidad</u>:

$\langle \alpha p, q \rangle = \int_0^1 \alpha p(x)q(x)dx = \alpha \int_0^1 p(x)q(x)dx = \alpha \langle p, q \rangle$ ✓

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019 (8)

* Aditividad:

$$\langle p+q, r\rangle = \int_0^1 (p+q)(x)\, r(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 (p(x)+q(x))\, r(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 (p(x)r(x) + q(x)r(x))\,dx$$
$$= \int_0^1 p(x)r(x)\,dx + \int_0^1 q(x)r(x)\,dx$$
$$= \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle \checkmark$$

$\therefore$, la función dada es un producto interno.

---

(8) $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^t = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow B^t A = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_3b_3 & a_2b_1 + a_4b_3 \\ a_1b_2 + a_3b_4 & a_2b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_3b_3 + a_2b_2 + a_4b_4$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$

* Positividad:

$$\langle A, A\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq 0 \quad \wedge \quad \langle A, A\rangle = 0 \Longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

* Simetría:

$$\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$
$$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4$$
$$= \langle B, A\rangle \checkmark$$

* Homogeneidad:

$$\langle \alpha A, B\rangle = \alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 + \alpha a_3b_3 + \alpha a_4b_4 = \alpha(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)$$
$$= \alpha\langle A, B\rangle \checkmark$$

Edgard A. Araya C.
Álgebra III - Ay. 01
09/Sep/2019

* Aditividad:

$$\langle A+B, C\rangle = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + (a_3+b_3)c_3 + (a_4+b_4)c_4$$

$$= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3 + a_4c_4 + b_4c_4$$

$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4)$$

$$= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle \checkmark$$

$\therefore$, la función dada es producto interno.

---

(9) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $i,j = 1, \dots, n$

$$\langle A, B\rangle = tr(B^tA) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii}$$

* Positividad: $\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \geq 0 \wedge \langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow a_{ii} = 0 \ \forall i$

Si consideramos una matriz $A = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$, se obtiene

$\langle A, A\rangle = 0$ pero $A \neq 0$.

$\therefore$, la función dada <u>no</u> es producto interno.

---

(10) Dado que $\forall v \in V: \langle u, v\rangle = 0$, en particular debe ser cierto para los vectores $e_1, e_2, \dots, e_n$ canónicos de $V = \mathbb{R}^n$.

Entonces, $\langle u, e_1\rangle = 0 \Rightarrow u_1 = 0$

$\langle u, e_2\rangle = 0 \Rightarrow u_2 = 0$

$\vdots$

$\langle u, e_n\rangle = 0 \Rightarrow u_n = 0$ $\therefore$, $\boxed{u = 0_V}$

---

(11) Dado que $\forall w \in V: \langle u-v, w\rangle = 0$, del ejercicio anterior se obtiene que $u - v = 0_V$, de donde se obtiene $u = v$.