UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22212 Álgebra III - Ayudantía 04

Método de Gram−Schmidt

Jueves 03 de Octubre de 2019

1.1. Proyección ortogonal de v sobre u

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno y sean $u, v \in V$. El vector $\boxed{p = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u}$ se dice ***proyección ortogonal*** de v sobre u.

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno y sean $u, v \in V$. El vector $\boxed{q = v - \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u}$ es ortogonal a u.

1.2. El Método

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno y sea $S_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base cualquiera de V. El conjunto $S_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ que se obtendrá es una ***base ortogonal*** de V:

$$u_1 = v_1 \quad ; \quad u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 \quad ; \quad u_3 = v_3 - \frac{\langle u_1, v_3\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 \quad \ldots \quad \boxed{u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, v_k\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i}$$

1.3. Ejercicios

1. Demostrar el Teorema mencionado en 1.1.
2. Sea $S_1 = \{(2,1); (1,4)\} \subseteq \mathbb{R}^2$:
   a) Demostrar que S_1 es base de $\mathbb{R}^2$.
   b) Determinar una base ortogonal $S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$.
   c) Determine una base ortonormal $S_3 \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. A partir de $S_1 = \{(2,1,1); (1,0,10); (2,-3,11)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, determine S_2 base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
4. Si $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$, determinar una base ortogonal para W.
5. Sea $S_1 = \{(2,1); (1,4)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y considerar el producto interno dado por $\langle (a,b), (c,d)\rangle = ac - ad - bc + 4bd$. Determinar S_2 base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.
6. Sea $S_1 = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ y considerar el producto interno dado por $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$. Determinar una base ortogonal S_2 para $\mathbb{R}_2[x]$.
7. Sea $S_1 = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ y considerar el producto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)\, dx$. Determinar una base ortogonal S_2 para $\mathbb{R}_2[x]$.
8. (*) Sea $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ y considerar el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$. Determinar una base **<u>ortonormal</u>** para W.

1.4. Algunas soluciones

1.

$$\begin{aligned}\langle q,u\rangle &= \left\langle v-\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u;u\right\rangle = \langle v,u\rangle + \left\langle -\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u;u\right\rangle\\ &= \langle v,u\rangle - \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\cancel{\langle u,u\rangle}}\right)\cancel{\langle u,u\rangle} = \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle\\ &= 0 \quad \square\,.\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}p(2,1)+q(1,4)=(0,0) &\implies 2p+q=0 \ \wedge\ p+4q=0\\ &\implies q=-2p \ \wedge\ p+4(-2p)=0\\ &\implies q=-2p \ \wedge\ -7p=0\\ &\implies q=0 \ \wedge\ p=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(2,1)+q(1,4)=(a,b) &\implies 2p+q=a \ \wedge\ p+4q=b\\ &\implies q=a-2p \ \wedge\ p+4(a-2p)=b\\ &\implies q=a-2p \ \wedge\ -7p=b-4a\\ &\implies q=a-2p \ \wedge\ p=\frac{4a-b}{7}\\ &\implies q=a-\frac{8a-2b}{7} \ \wedge\ p=\frac{4a-b}{7}\\ &\implies q=\frac{7a-8a+2b}{7} \ \wedge\ p=\frac{4a-b}{7}\\ &\implies q=\frac{-a+2b}{7} \ \wedge\ p=\frac{4a-b}{7}\end{aligned}$$

2. b)

$$\begin{aligned}&\langle (2,1);(1,4)\rangle = 2\cdot 1+1\cdot 4 = 6\neq 0\\ &\implies u_1=(2,1)\\ &u_2=(1,4)-\frac{\langle (2,1);(1,4)\rangle}{\langle (2,1);(2,1)\rangle}(2,1)=(1,4)-\frac{6}{5}(2,1)=\left(1-\frac{12}{5};4-\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{-7}{5};\frac{14}{5}\right)\end{aligned}$$

2. c)

$$\sqrt{\langle u_1,u_1\rangle}=\sqrt{5}\implies w_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\sqrt{\langle u_2,u_2\rangle}=\sqrt{\frac{245}{25}}=\sqrt{\frac{49\cdot 5}{25}}=\frac{7}{5}\sqrt{5}=\frac{7}{\sqrt{5}}\implies w_2=\left(\frac{\sqrt{5}\cdot -7}{5\cdot 7};\frac{\sqrt{5}\cdot 14}{5\cdot 7}\right)=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\quad\square\,.$$

3.
$$\begin{aligned}
\langle(2,1,1);(1,0,10)\rangle &= 2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 10 = 12 \neq 0\\
\langle(2,-3,11);(1,0,10)\rangle &= 2\cdot 1+-3\cdot 0+11\cdot 10 = 112 \neq 0\\
\langle(2,1,1);(2,-3,11)\rangle &= 2\cdot 2+1\cdot -3+1\cdot 11 = 12 \neq 0\\
\implies u_1 &= (2,1,1)\\
u_2 &= (1,0,10) - \frac{\langle(1,0,10);(2,1,1)\rangle}{\langle(2,1,1);(2,1,1)\rangle}(2,1,1) = (1,0,10) - \frac{12}{6}(2,1,1)\\
&= (1,0,10) - 2(2,1,1) = (1-4;0-2;10-2) = (-3,-2,8)\\
u_3 &= (2,-3,11) - \frac{\langle(2,-3,11);(2,1,1)\rangle}{\langle(2,1,1);(2,1,1)\rangle}(2,1,1) - \frac{\langle(2,-3,11);(-3,-2,8)\rangle}{\langle(-3,-2,8);(-3,-2,8)\rangle}(-3,-2,8)\\
&= (2,-3,11) - \frac{12}{6}(2,1,1) - \frac{88}{77}(-3,-2,8) = (2,-3,11) - 2(2,1,1) - \frac{8}{7}(-3,-2,8)\\
&= (2,-3,11) - (4,2,2) - \left(\frac{-24}{7};\frac{-16}{7};\frac{64}{7}\right)\\
&= \left(\frac{14-28+24}{7};\frac{-21-14+16}{7};\frac{77-14-64}{7}\right) = \left(\frac{10}{7};\frac{-19}{7};\frac{-1}{7}\right) \quad \square .
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
w=(a,b,c)\in W &\implies w\in\mathbb{R}^3 \ \wedge\ a+b+c=0\\
&\implies (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \ \wedge\ a=-b-c\\
&\implies w=(-b-c,b,c)\\
&\implies w=b(-1,1,0)+c(-1,0,1)\\
&\implies W=\langle\{(-1,1,0);(-1,0,1)\}\rangle
\end{aligned}$$

$$p(-1,1,0)+q(-1,0,1)=(0,0,0) \implies -p-q=0 \wedge \boxed{p=0\wedge q=0}$$

$$\begin{aligned}
\langle(-1,1,0);(-1,0,1)\rangle &= -1\cdot -1+1\cdot 0+0\cdot 1 = 1\neq 0\\
\implies u_1 &= (-1,1,0)\\
u_2 &= (-1,0,1) - \frac{\langle(-1,0,1);(-1,1,0)\rangle}{\langle(-1,1,0);(-1,1,0)\rangle}(-1,1,0) = (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0)\\
&= \left(\frac{-2+1}{2};\frac{0-1}{2};\frac{2-0}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2};1\right) \quad \square .
\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}
\langle(2,1);(1,4)\rangle &= 2\cdot 1-2\cdot 4-1\cdot 1+4\cdot 1\cdot 4 = 2-8-1+16 = 9\neq 0\\
\langle(2,1);(2,1)\rangle &= 2\cdot 2-2\cdot 1-1\cdot 2+4\cdot 1\cdot 1 = 4-2-2+4 = 4\\
\implies u_1 &= (2,1)\\
u_2 &= (1,4) - \frac{\langle(2,1);(1,4)\rangle}{\langle(2,1);(2,1)\rangle}(2,1) = (1,4) - \frac{9}{4}(2,1) = \left(\frac{4-18}{4};\frac{16-9}{4}\right) = \left(\frac{-7}{2};\frac{7}{4}\right) \quad \square .
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\langle 1; 1-x\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot -1 = 0\\
\langle 1; 1-x^2\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot -3 = -2 \neq 0\\
\langle 1-x; 1-x^2\rangle &= 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + -1\cdot -3 = 4 \neq 0\\
\langle 1; 1\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3\\
\langle 1-x; 1-x\rangle &= 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + -1\cdot -1 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow u_1 &= 1\\
u_2 &= 1-x\\
u_3 &= (1-x^2) - \frac{\langle 1-x^2; 1\rangle}{\langle 1; 1\rangle}(1) - \frac{\langle 1-x^2; 1-x\rangle}{\langle 1-x; 1-x\rangle}(1-x)\\
&= (1-x^2) - \frac{-2}{3}(1) - \frac{4}{2}(1-x) = 1 - x^2 + \frac{2}{3} - 2 + 2x\\
&= -x^2 + 2x - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\langle 1; x\rangle &= \int_0^1 1\cdot x\ dx = \frac{1}{2} \neq 0 \quad ; \quad \langle 1; x^2\rangle = \int_0^1 1\cdot x^2\ dx = \frac{1}{3} \neq 0\\
\langle x; x^2\rangle &= \int_0^1 x\cdot x^2\ dx = \frac{1}{4} \neq 0 \quad ; \quad \langle 1; 1\rangle = \int_0^1 1\cdot 1\ dx = 1\\
\langle x^2; x-(1/2)\rangle &= \int_0^1 (x^3 - x^2/2)\ dx = 1/4 - 1/6 = 1/12\\
\langle x-(1/2); x-(1/2)\rangle &= \int_0^1 (x-1/2)^2\ dx = 1/12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow u_1 &= 1\\
u_2 &= (x) - \frac{\langle x; 1\rangle}{\langle 1; 1\rangle}(1) = (x) - \frac{1}{2}(1) = x - \frac{1}{2}\\
u_3 &= (x^2) - \frac{\langle x^2; 1\rangle}{\langle 1; 1\rangle}(1) - \frac{\langle x^2; x-(1/2)\rangle}{\langle x-(1/2); x-(1/2)\rangle}\left(x - \frac{1}{2}\right)\\
&= (x^2) - \frac{1}{3}(1) - \frac{(1/12)}{(1/12)}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \square .
\end{aligned}$$

8. El problema está resuelto en "Libro de Álgebra II, Capítulo 3: Producto Interno" de Ricardo Santander (Situación de Desempeño 6, páginas 32-35). Lo puedes encontrar en el siguiente link:
`http://palillo.usach.cl/coordinacion_algebra2/pdf/algebra2/Capitulo3-Productointerno.pdf`