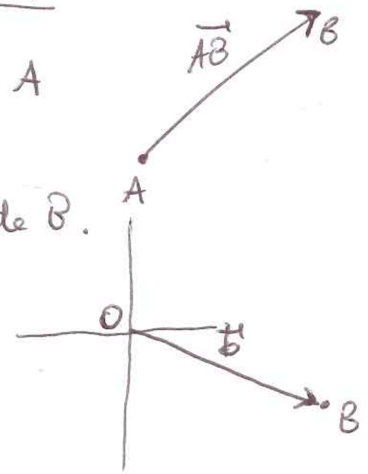
Vectores y sus Propiedades

Edgard A. Araya C.
Cálculo III - Ay. 04
06/Mayo/2019

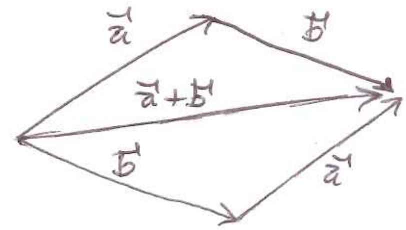
* Trazo dirigido o flecha:

$\overrightarrow{AB}$: flecha que va desde A hacia B.



$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, vector posición de B.

* Adición



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Propiedades:
① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

② $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

③ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$

④ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF})$

* Ponderación por Escalar

Dado $\overrightarrow{AB}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow$ A, B, C colineales y $\frac{AC}{AB} = \alpha$.

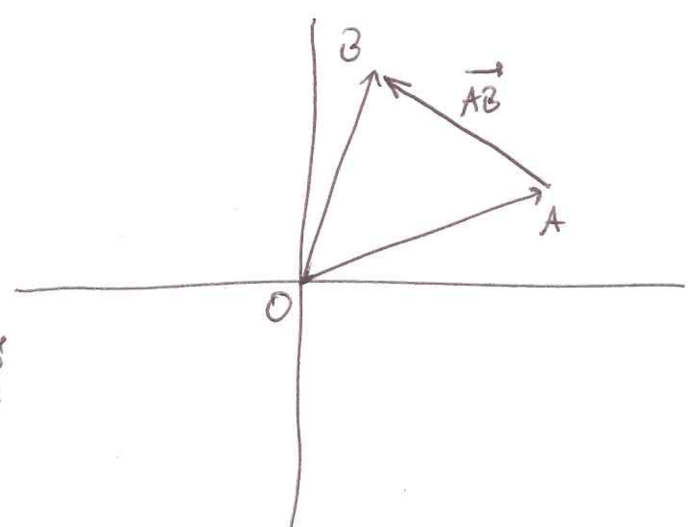
Propiedades:
① $\alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{CD}$

② $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AB}$

③ $\alpha(\beta\overrightarrow{AB}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{AB}$

④ $1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

* Vector no ligado al origen



De la figura se tiene

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ / $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$

(Posición del final menos la del inicial)

Álgebra de Vectores en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$)

Dados $A=(2,3)$ y $B=(1,4)$, además de $\alpha=\frac{2}{5}$ y $\beta=3$.

Ⓐ Obtener $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ y $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ Sol: $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(1,4)$

Ⓑ Obtener $\vec{a}+\vec{b}$, $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$.   Sol: $\vec{a}+\vec{b}=(3,7)$, $\alpha\vec{a}=\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)$, $\beta\vec{b}=(3,12)$

Ⓒ Obtener $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. Sol: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(-1,1)$

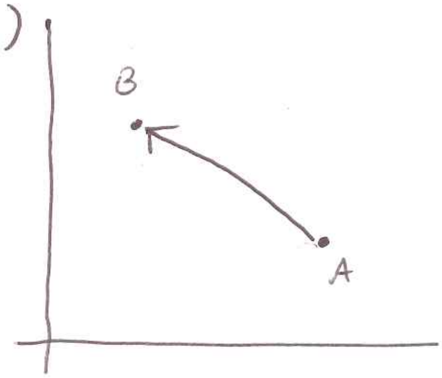
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}=(1,-1)$

* Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$)

Dados $A=(2,3)$ y $B=(1,4)$, determine $d(A,B)$.

Sol: $d(A,B)=\sqrt{(1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$.

Módulo de un vector (Largo, norma, medida...)



Si lo meditamos con paciencia, el módulo de un vector será igual a la distancia entre sus puntos extremos.

Visto de otra forma, si $\overrightarrow{AB}=(x,y)$, entonces $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{x^2+y^2}}$

* Combinación Lineal de vectores

Esto no es más que un reflejo de la linealidad de la suma y la ponderación por escalar. Dados $\vec{a},\vec{b}$ y α,β, entonces se dice que $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ej.: Dados $\vec{a}=(2,3)$ y $\vec{b}=(1,4)$, determine:

Ⓐ $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$

Ⓑ $\|\vec{a}+\vec{b}\|$, $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$

Ⓒ Hallar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tal que $(8,15)$ sea combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Sol: Ⓐ $\|\vec{a}\|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$. $\|\vec{b}\|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

Ⓑ $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|(3,7)\|=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$ $(7\leq\sqrt{58}\leq 8)$

Ⓒ $\alpha=\frac{17}{5}$ y $\beta=\frac{6}{5}$ //

$2\alpha+\beta=8 \Rightarrow \beta=8-2\alpha$

$3\alpha+4\beta=15 \Rightarrow 3\alpha+32-8\alpha=15$

$-5\alpha=-17$

$\beta=8-\frac{34}{5}$

* Producto Escalar (Punto) (en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$)

Dados $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Si $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}$.

Notar que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ resulta en un número real, no un vector.

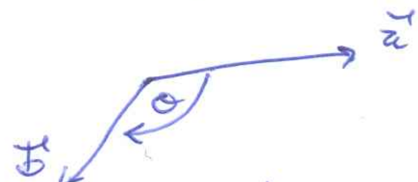
* Ángulo entre dos vectores

Para el producto escalar, es posible escribir también:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})}$$

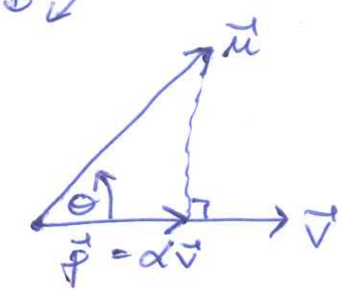
$$\Rightarrow \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|} \Longrightarrow \boxed{\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}\right)}$$

Notar que este ángulo siempre es tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.



* Proyección ortogonal

Del ángulo entre dos vectores, más un poco de Trigonometría, se tiene:



$$\cos \theta = \frac{\|\alpha \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \Longrightarrow \frac{|\alpha| \, \|\vec{v}\|}{\cancel{\|\vec{u}\|}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\cancel{\|\vec{u}\|} \, \|\vec{v}\|}$$

$$\Rightarrow |\alpha| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

¿Qué signo tendrá α? ¡$\alpha > 0$!

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}}$$

Módulo de la proyección ortogonal

$$\Rightarrow \vec{p} = \alpha \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \vec{v} \Longrightarrow \boxed{\vec{p}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^{-3}}\right) \hat{v}}$$

Vector proyección ortogonal.

$\vec{v} = \|\vec{v}\| \, \hat{v}$

Ej: Dados los vectores $\vec{a} = (3,1,2)$ y $\vec{b} = (1,4,5)$, calcular:

(A) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (B) $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ (C) $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ (D) Proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

Sol: (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 3 + 4 + 10 = \boxed{17 = \vec{a} \cdot \vec{b}}$

(B) $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \boxed{\sqrt{14} = \|\vec{a}\|}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 16 + 25} = \boxed{\sqrt{42} = \|\vec{b}\|}$

(C) $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|} = \frac{17}{\sqrt{7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{17}{14\sqrt{3}} \approx 0{,}701$$

$\Rightarrow \boxed{\theta \approx 45{,}49°}$

(D) $\vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right) \vec{b} = \left(\dfrac{17}{42}\right)(1,4,5) = \boxed{\left(\dfrac{17}{42}; \dfrac{34}{21}; \dfrac{85}{42}\right) = \vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a})}$

O
