Vectores, Rectas y Planos

Edgard A. Araya C.
Cálculo III – Ay. 05
13/Mayo/2019

Producto Vectorial (Cruz) (Solamente en $\mathbb{R}^3$)

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2 ; -(a_1 b_3 - a_3 b_1) ; a_1 b_2 - a_2 b_1)$$ Como Vector

Una mnemotecnia: (el determinante no tiene sentido, pues $\hat{\imath} \notin \mathbb{R}$).

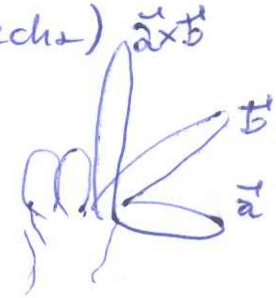
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

← Vectores unitarios
← Coordenadas de $\vec{a}$
← Coordenadas de $\vec{b}$
} en el mismo orden ($\vec{a}$ primero, $\vec{b}$ segundo).

$$= \hat{\imath}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + (-\hat{\jmath})(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Como Combinación Lineal de $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

Regla de Orientación (de la mano derecha)



Dedo pulgar: Vector $\vec{a}$.
Dedo índice: Vector $\vec{b}$.
Dedo central: Vector $\vec{a} \times \vec{b}$.

Propiedades:

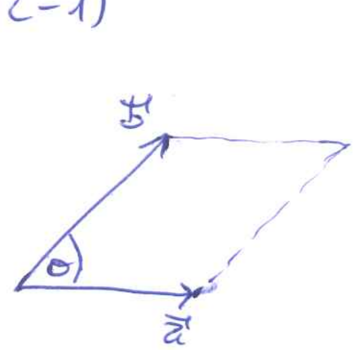
1. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ y $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
2. $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$
3. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$
4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Ej: Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$ si $\vec{a} = (3, 1, 2)$ y $\vec{b} = (1, 4, 5)$.

Sol:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & k \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 ; -(3 \cdot 5 - 1 \cdot 2) ; 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1)$$
$$= (5 - 8 ; -15 + 2 ; 12 - 1)$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (-3 ; -13 ; 11)}$$

Obs: $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$: área del paralelogramo de lados $\|\vec{a}\|$ y $\|\vec{b}\|$.



* Producto Mixto (Caja) (Solamente en $\mathbb{R}^3$)

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$
$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

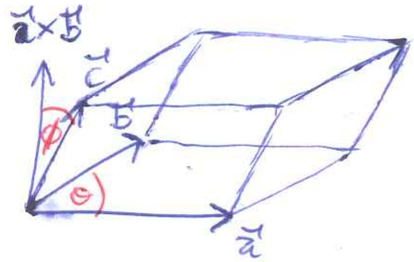
$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(En este caso, el determinante sí está bien definido)

Obs: $|[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \, \|\vec{c}\| \, |\cos \measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c})|$

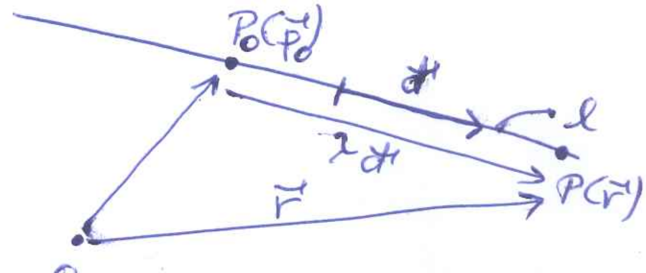
$= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \|\vec{c}\| \, |\operatorname{sen} \overset{\theta}{\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})}| \, |\cos \overset{\phi}{\measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c})}|$

$|[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]|$ representa el volumen del paralelepípedo de lados $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ y $\|\vec{c}\|$.



* Recta en $\mathbb{R}^n$

Para determinar una recta, buscamos un punto de ella P_0, cuyo vector posición es $\vec{p_0}$. Además, vemos que la recta posee una dirección dada por el vector no ligado al origen $\vec{d}$. Entonces, desde $\vec{p_0}$ podemos llegar a cualquier otro punto $P(\vec{r})$ mediante algún múltiplo de $\vec{d}$. Luego, desde O, se tendrá:



$$\ell : \boxed{\vec{r} = \vec{p_0} + \lambda \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ecuación Vectorial (1° Forma)

Si consideramos $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{p_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$, podemos escribir:

$\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (d_x, d_y, d_z)$

$\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + \lambda d_x ; y_0 + \lambda d_y ; z_0 + \lambda d_z)$

$$\Rightarrow \ell : \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda d_x \\ y = y_0 + \lambda d_y \\ z = z_0 + \lambda d_z \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ecuación Paramétrica

Si en las tres ecuaciones anteriores despejamos $\lambda \in \mathbb{R}$, se tendrá:

$$\Longrightarrow \frac{x-x_0}{d_x} = \lambda \quad ; \quad \frac{y-y_0}{d_y} = \lambda \quad ; \quad \frac{z-z_0}{d_z} = \lambda$$

$$\Longrightarrow \quad l : \boxed{\frac{x-x_0}{d_x} = \frac{y-y_0}{d_y} = \frac{z-z_0}{d_z}}$$ Ecuaciones Simétricas

Finalmente, recuperamos una propiedad del producto vectorial:

"Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, entonces $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\vec{a} \parallel \vec{b}$)."

De la Ecuación Vectorial (1° Forma) se tendrá:

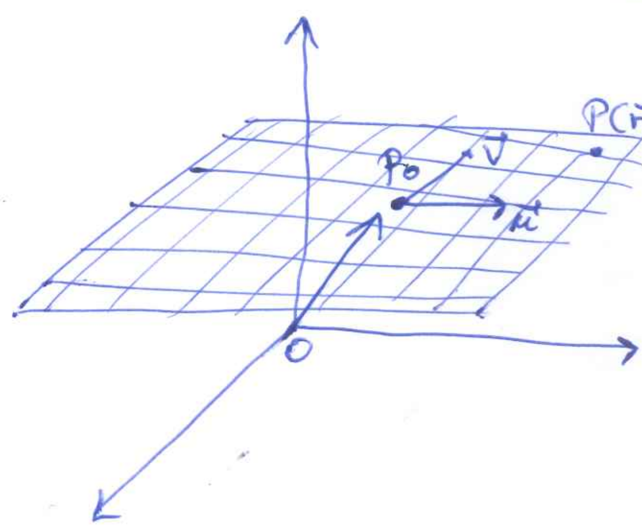
$$l : \ \vec{r} = \vec{p_0} + \lambda \vec{d}$$

$$\Longrightarrow \vec{r} - \vec{p_0} = \lambda \vec{d}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\vec{r} - \vec{p_0}) \times \vec{d} = \vec{0}} : l$$ Ecuación Vectorial (2° Forma)

---

* Plano en $\mathbb{R}^4$.



$$\Pi : \boxed{\vec{r} = \vec{p_0} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

$$\Pi : \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_x + \beta v_x \\ y = y_0 + \alpha u_y + \beta v_y \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha u_z + \beta v_z \end{cases}}$$

$$\Pi : \boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & u_x & v_x \\ y-y_0 & u_y & v_y \\ z-z_0 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0}$$

$$\Pi : (x-x_0)\underbrace{(u_y v_z - u_z v_y)}_{A} - (y-y_0)\underbrace{(u_x v_z - u_z v_x)}_{B} + (z-z_0)\underbrace{(u_x v_y - u_y v_x)}_{C} = 0$$

$$x\,\overbrace{(u_y v_z - u_z v_y)} + y\,\overbrace{(u_z v_x - u_x v_z)} + z\,\overbrace{(u_x v_y - u_y v_x)}$$

$$+ \underbrace{\left(-x_0(u_y v_z - u_z v_y) + y_0(u_x v_z - u_z v_x) - z_0(u_x v_y - u_y v_x)\right)}_{D} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \pi : \boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$ Ecuación Cartesiana

Finalmente, recuperamos una propiedad del producto escalar:
"Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, entonces $\vec{a} \perp \vec{b}$ (o bien $\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$)."

Por la construcción del plano, se tiene que $(\vec{r} - \vec{p_0})$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por ello, $(\vec{r} - \vec{p_0})$ vive en el plano.

$$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \;\wedge\; \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{r} - \vec{p_0} \Longrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{r} - \vec{p_0}) = 0 \qquad / \; \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \pi : \boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p_0}) = 0}$$ Ecuación Normal

Ejercicios:

① Determinar un vector cuya norma sea $\sqrt{2}$ y además sea perpendicular con $\vec{s} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ y $\vec{t} = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$.

② Demostrar que $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$.

③ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, demostrar que $\tan(\theta) = \dfrac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\vec{u} \cdot \vec{v}}$.

④ Hallar todas las ecuaciones de una recta que pasa por los puntos $A(1,5,0)$ y $B(-6,0,1)$.

⑤ La recta que pasa por A y B anteriores es perpendicular con la recta que pasa por $C(-5,1,5)$ y $D(x,4,6)$. Hallar x.

⑥ Los lados de un triángulo están sobre las rectas cuyas ecuaciones son: $l_1: x + 5y - 7 = 0$; $l_2 = 3x - 2y - 4 = 0$; $l_3: 7x + y + 19 = 0$. Determinar el área del triángulo.

⑦ Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,-1,1)$, $B(-2,1,3)$ y $C(3,2,-2)$.

⑧ Hallar la ecuación del plano que pasa por $P_0(-2,-1,5)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $A(2,-1,2)$ y $B(-3,1,2)$.

⑨ Hallar la intersección entre los planos $\begin{cases} \pi_1: 2x - y + 3z - 2 = 0 \\ \pi_2: x + 4y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$
