Ejercicios Capítulo 1 "Matemática Escolar"

Edgard A. Araya C.
Geometría I - Ay. 02
Martes 12 de Mayo de 2020

① Ⓐ Expresar $\alpha = 17°32'15''$ como grados y fracción de grados.

Ⓑ Expresar $\beta = 14,124°$ en grados, minutos y segundos.

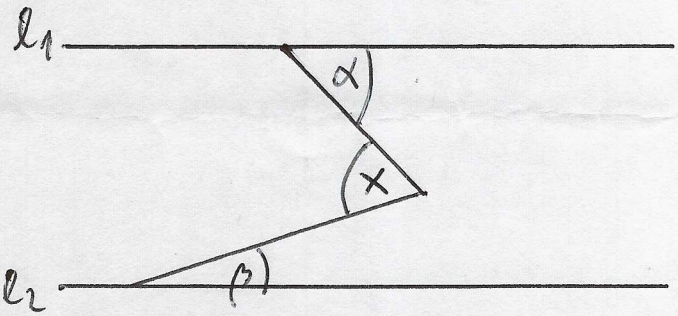
Ⓒ Expresar $\gamma = 120°$ y $\delta = 15°3'6''$ en radianes.

Ⓓ Expresar $\phi = \frac{5\pi}{3}$ rad y $\varphi = 3,2$ rad en grados.

② Sean $\overline{AM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ y $\overline{PB}$ segmentos consecutivos de una misma recta tales que $\ell(\overline{AM}) = x$, $\ell(\overline{MN}) = 2x$, $\ell(\overline{NP}) = \ell(\overline{PB}) = x+1$ y $\ell(\overline{AB}) = 17$. Determinar la medida de cada segmento.

③ Sean α, β y γ ángulos adyacentes tales que forman un ángulo extendido. Si $\beta = 3\alpha$ y $\gamma = 2\beta$, hallar la medida de cada uno.

④ En la figura, $\ell_1 // \ell_2$, $\alpha = 35°$ y $\beta = 16°$. Hallar la medida de x.



⑤ Demostrar que las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto.

⑥ Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares tienen igual medida si son de la misma naturaleza (ambos agudos o ambos obtusos).

⑦ Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares y son de distinta naturaleza, son suplementarios.

⑧ Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos tienen igual medida si son de la misma naturaleza y son suplementarios si son de distinta naturaleza.

Una solución:

① Ⓐ $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

(i) $\frac{32}{60} = \frac{\cancel{8}\cdot 4}{\cancel{12}\cdot 5} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{8}{15} = 0{,}5\overline{3}^\circ$

$8:15 = 0{,}5\overline{3}$
80
50
5...

(ii) $\frac{15}{60}\cdot\frac{1}{60} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{60} = \frac{1}{240} = 0{,}0041\overline{6}$

$1:240 = 0{,}0041\overline{6}$
1000
400
1 0
160...

↑ Segundos ↑ Minutos

Suma:

$$\begin{array}{r} 17{,}00000 \\ 0{,}53333\overline{3} \\ 0{,}0041\overline{6} \\ \hline 17{,}53750 \end{array}$$

$\therefore$, $17^\circ 32' 15'' = 17{,}5375^\circ$ //.

Ⓑ $0{,}124^\circ = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 60\cdot 0{,}124 = 7{,}44'$

$0{,}44' = \frac{y}{60} \Rightarrow y = 60\cdot 0{,}44 = 26{,}4''$

$\therefore$, $14{,}124^\circ = 14^\circ 7' 26{,}4''$ //.

Ⓒ $\frac{120}{360} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = \frac{24\cancel{0}\pi}{36\cancel{0}} = \frac{2\pi}{3}$ rad //.

$15^\circ 3' 6'' = 15 + \frac{3}{60} + \frac{6}{3600} = 15 + \frac{1}{20} + \frac{1}{600}$

$= \frac{9000+30+1}{600} = \frac{9031}{600}^\circ$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{2}\pi}{360}\cdot\frac{9031}{\cancel{600}\,300} = \frac{9031\pi}{108000}$ //.

$= 15{,}05 + 0{,}001\overline{6}$

$= 15{,}051\overline{6}$

¡Poco práctico!

$9031 = 11\cdot 821$ //.

$108 = 2\cdot 54$
$= 2^2\cdot 27$
$= 2^2\cdot 3^3$

$108000 = 2^2\cdot 3^3\cdot 10^3$
$= 2^5\cdot 3^3\cdot 5^3$ //.

① Ⓓ $\dfrac{\frac{5\cancel{\pi}}{3}}{\cancel{2\pi}} = \dfrac{x}{\cancel{360}\ 180} \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}\cdot 180 = 5\cdot 60 = 300^\circ$ //

$\dfrac{3{,}2}{2\pi} = \dfrac{x}{360} \Rightarrow x = \dfrac{360\cdot 1{,}6}{\pi} \approx \dfrac{576}{3{,}14} = 183{,}43949\ldots$

$\Rightarrow x = \left(\dfrac{576}{\pi}\right)^\circ \approx 183{,}346494\ldots$

---

② $x + 2x + (x+1) + (x+1) = 17$

$\Leftrightarrow 5x + 2 = 17 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$ //

$\Rightarrow \ell(\overline{AM}) = 3,\ \ell(\overline{MN}) = 6,\ \ell(\overline{NP}) = \ell(\overline{PB}) = 4$ //

---

③ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ / $\beta = 3\alpha$, $\gamma = 2\beta = 2(3\alpha) = 6\alpha$

$\Rightarrow \alpha + 3\alpha + 6\alpha = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 10\alpha = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = 18^\circ} \Rightarrow \alpha = 18^\circ,\ \beta = 54^\circ,\ \gamma = 108^\circ$ //

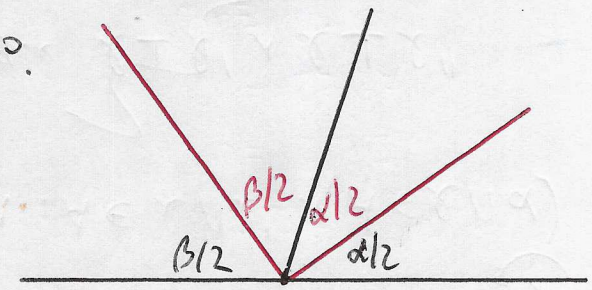
---

④ Trazando una perpendicular por el vértice del ángulo x, es fácil demostrar que $x = \alpha + \beta$. Luego, $\boxed{x = 51^\circ}$.

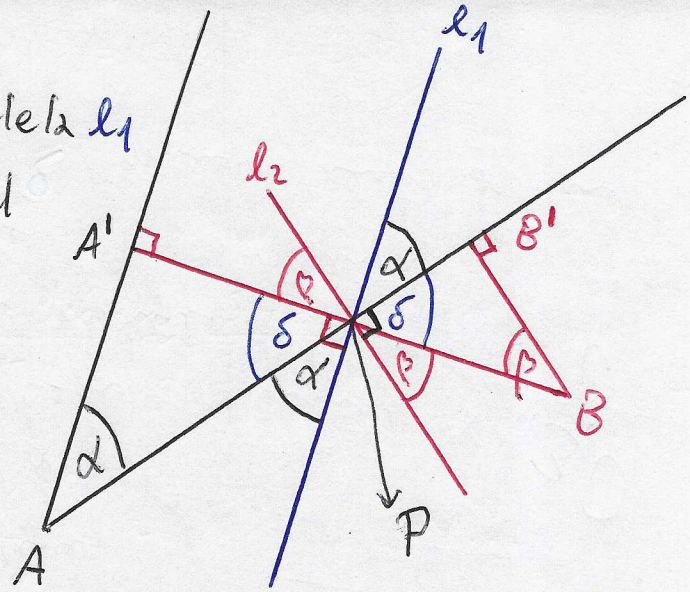
---

⑤ Sean α y β las medidas de los ángulos adyacentes suplementarios. Entonces $\alpha + \beta = 180^\circ$. Además, dado que las bisectrices dividen al ángulo que cortan en partes iguales, tendremos que el ángulo entre las bisectrices medirá $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Luego, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

$\therefore$, el ángulo buscado es recto.



⑥ <u>Caso 1</u>: α, β agudos.

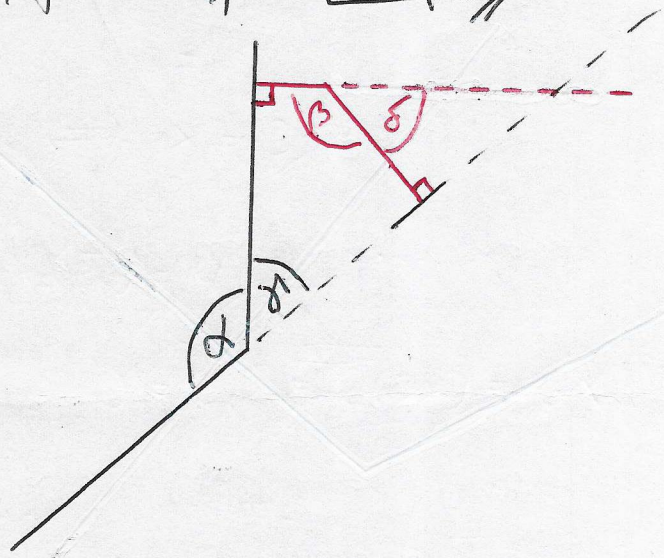


Trazando en el punto P una paralela l_1 al rayo $\overrightarrow{AA'}$ y una paralela al rayo $\overrightarrow{BB'}$ y usando propiedades de ángulos entre paralelas, se obtiene que:

* $\alpha + \delta = 90°$ $\quad (l_1 \parallel \overrightarrow{AA'})$
* $\beta + \delta = 90°$ $\quad (l_2 \parallel \overrightarrow{BB'})$

De ello, se obtiene $\alpha + \delta = \beta + \delta$, por lo que $\boxed{\alpha = \beta}$ //.

<u>Caso 2</u>: α, β obtusos.



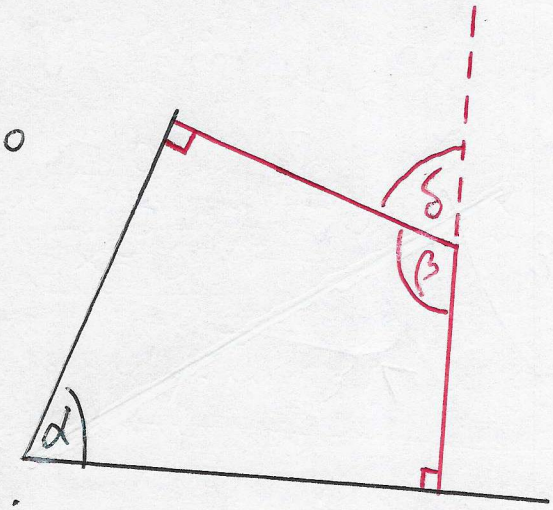
Considerar γ suplemento de α y δ suplemento de β.

Ahora, γ y δ son agudos y cumplen los requisitos del Caso 1, por lo que $\gamma = \delta$.

Luego, $180° - \alpha = 180° - \beta$

$\Longrightarrow \quad \beta = \alpha$ //

⑦ <u>Caso 3</u>: (SPG) α agudo, β obtuso



Considerar δ suplemento de β.

Ahora, α y δ son agudos y cumplen los requisitos del Caso 1. Luego, $\alpha = \delta$.

Como $\delta = 180° - \beta$, se tiene $\alpha = 180° - \beta$, de donde $\boxed{\alpha + \beta = 180°}$ //.