Edgard A. Araya C
Geometría I - Ay. 04
Martes 09 de Junio 2020

Ejercicios Capítulo 3 "Geometría Escolar"

1. (A) Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm. y un cateto es la tercera parte del otro, hallar la medida de los catetos.

   (B) En un ΔABC rectángulo en C, la hipotenusa mide 13 cm. y uno de sus catetos mide 12 cm. Hallar:
   - la medida del cateto faltante
   - la medida de la altura sobre la hipotenusa.
   - la medida de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

   (C) Determinar altura, perímetro y área de un triángulo equilátero de lado "a".

   (D) ¿Es posible construir un triángulo de lados 2, 3 y 6 cm?

   (E) Demostrar que las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°.

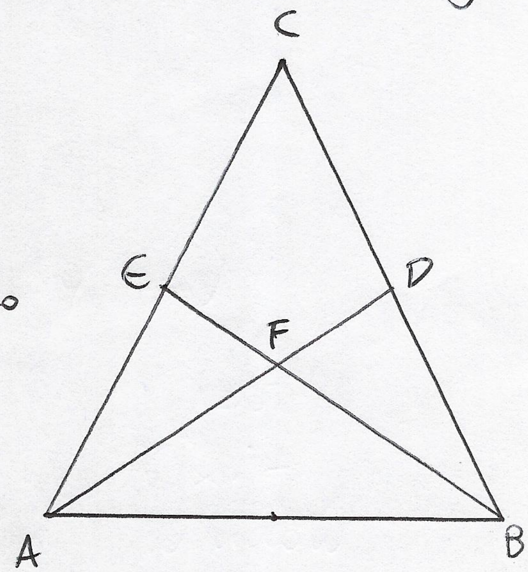
   (F) Demostrar que las medidas de los ángulos exteriores de cualquier triángulo suman 360°.

2. Demostrar que en un triángulo equilátero, si un segmento es altura, entonces será también bisectriz, simetral y transversal de gravedad.

3. Demostrar que en un triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos (es decir, no adyacentes al mismo).

4. Demostrar que la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también su simetral.

5. En la figura, ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$. Además, $\overline{AD}$ bisectriz del $\measuredangle BAC$ y $\overline{BE}$ bisectriz del $\measuredangle ABC$. Demostrar que $\Delta ABD \cong \Delta BAE$.



6. Demostrar que una mediana de un triángulo cualquiera es paralela al lado que no contiene a sus extremos.

7. Demostrar que la longitud de una mediana de un triángulo cualquiera es igual a la mitad de la longitud del lado que no contiene a sus extremos.

Una solución:

① Ⓐ $c = 20$ cm $\quad a = ? \quad b = ?$, con $a = 3b$

Teo. Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 20^2 = (3b)^2 + b^2$

$\Rightarrow 40\cancel{0} = 1\cancel{0}b^2$

$\Rightarrow \boxed{40 = b^2} \Rightarrow b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ //.

$\Rightarrow a = 6\sqrt{10}$ //

Ⓑ $c = 13$ cm , $b = 12$ cm , $a = ?$, $h_c = ?$, $p = ?$, $q = ?$

Teo. Pitágoras: $a^2 = c^2 - b^2$

$\Rightarrow a^2 = 169 - 144$

$\Rightarrow \boxed{a^2 = 25} \Rightarrow a = 5$ //.

Área del Δ: $\acute{A}_\Delta = \dfrac{c \cdot h_c}{\cancel{2}} = \dfrac{a \cdot b}{\cancel{2}}$ (¿Por qué?)

$\Rightarrow 13 \cdot h_c = 12 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{h_c = \dfrac{5 \cdot 12}{13}} \approx 4{,}62$ cm //.

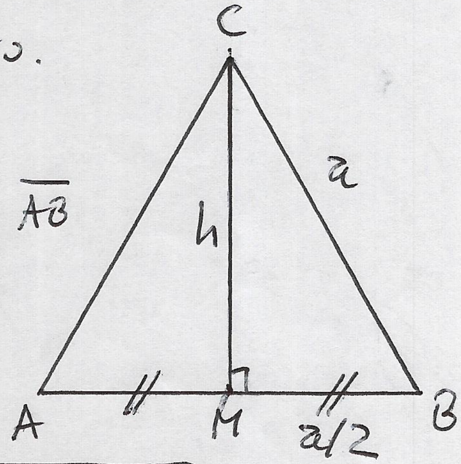
Teo. Euclides: $a^2 = c \cdot p \quad \wedge \quad b^2 = c \cdot q$

$\Rightarrow \boxed{p = \dfrac{25}{13}} \approx 1{,}923$ // $\quad \wedge \quad \boxed{q = \dfrac{144}{13}} \approx 11{,}077$ //.

Ⓒ Sea "a" el lado del triángulo equilátero.

* Su perímetro es $\boxed{P_\Delta = 3a}$ //.
* Considerando que la altura divide la base $\overline{AB}$ en partes iguales, entonces $\ell(\overline{MB}) = \dfrac{a}{2}$.

Luego, por Teo. Pitágoras, $\boxed{h = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}}$.



* Su área será $\acute{A}_\Delta = \dfrac{a \cdot h}{2} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\acute{A}_\Delta = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}}$ //.

(D) <u>Desigualdad triangular</u>: Si a, b, c son las medidas de los lados de un ΔABC cualquiera, se deben cumplir:

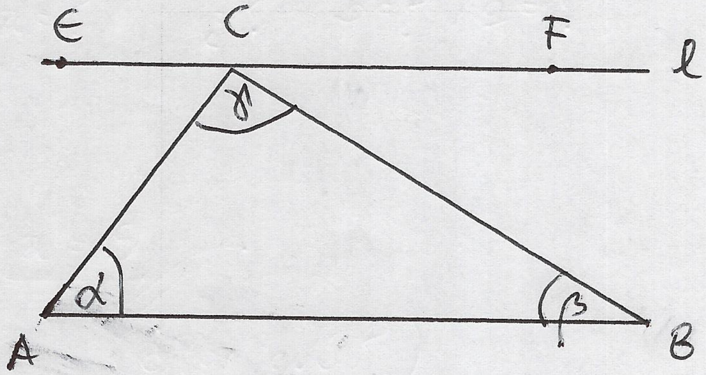
* $a < b + c$ * $b < a + c$ * $c < a + b$

En este caso, SPG digamos $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$.

Observar que <u>siempre</u> dos de las condiciones se cumplirán trivialmente $(2 < 3 + 6 \wedge 3 < 2 + 6)$. Luego, <u>siempre</u> bastará con verificar para el lado mayor: $6 < 2 + 3$ X.

$\therefore$, no existe ΔABC con $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$.

(E) Considerar el ΔABC de la figura y por C pasa una recta $\ell \parallel \overline{AB}$. Considerar $E \in \ell$, $E \neq C$ y F del lado opuesto que E respecto de C.



Entonces $m(\measuredangle ECA) = \alpha$

$m(\measuredangle FCB) = \beta$

$m(\measuredangle ACB) = \gamma$

Además, se tiene $m(\measuredangle ECA) + m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle FCB) = 180°$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°} \; //.$$

(F) Considerar ΔABC con $m(\measuredangle A) = \alpha$, $m(\measuredangle B) = \beta$, $m(\measuredangle C) = \gamma$.

Los ángulos exteriores son tales que $m(\measuredangle A') = 180° - \alpha$

$m(\measuredangle B') = 180° - \beta$

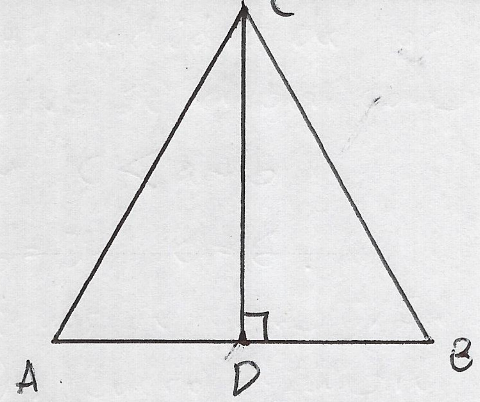
$m(\measuredangle C') = 180° - \gamma$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow m(\measuredangle A') + m(\measuredangle B') + m(\measuredangle C') &= (180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) \\ &= 540° - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 540° - 180° \\ &= 360° \; //. \end{aligned}$$

---

② Hipótesis: * ΔABC equilátero.

* $\overline{CD}$ altura.



P.D.: * $\overline{CD}$ bisectriz

* $\overline{CD}$ simetral
* $\overline{CD}$ transversal de gravedad.

Dem: Como ΔABC equilátero, entonces $\overline{AC} \cong \overline{AB} \cong \overline{BC}$.

$\measuredangle A \cong \measuredangle B \cong \measuredangle ACB$.

Ahora, se abusará del criterio LLA*, pues:

* $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ * $\overline{CD}$ lado común * $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BDC$ (recto)

$\therefore$, $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ por LLA*.

En particular, $\overline{AD} \cong \overline{BD} \Rightarrow D$ punto medio de $\overline{AB}$.

ⓘ Bisectriz: en particular, $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BCD$, por lo que $\overline{CD}$ es bisectriz del $\measuredangle C$.

ⓘⓘ Transversal de gravedad: como D es punto medio de $\overline{AB}$ y C es el vértice opuesto, entonces $\overline{CD}$ es transversal de gravedad.

ⓘⓘⓘ Simetral: como $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, entonces D está en la simetral de $\overline{AB}$.

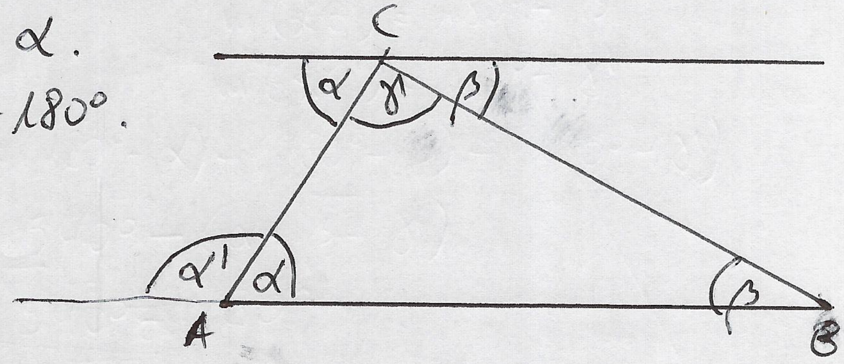
Luego, como $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, entonces C está en la simetral de $\overline{AB}$.

Por Ax. I1, la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es simetral de $\overline{AB}$ y, en particular, el segmento $\overline{CD}$ es simetral de $\overline{AB}$.

---

③ Ya sabemos que $\alpha' = 180° - \alpha$.

Además sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



$$\Rightarrow \alpha' = 180° - \alpha$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha$$
$$\boxed{\alpha' = \beta + \gamma}$$

La demostración para β' y γ' es análoga.

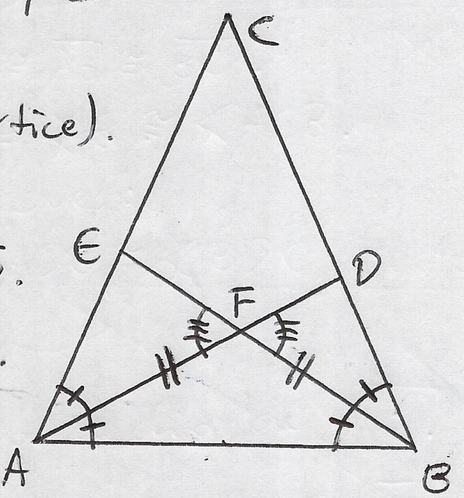
④ Ejercicio !!!

⑤ Como $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$, entonces $\measuredangle ABC \cong \measuredangle BAC$.

Como $\overline{AD}$ es bisectriz de $\measuredangle BAC$, entonces $\measuredangle BAD \cong \measuredangle CAD$.

Como $\overline{BE}$ es bisectriz de $\measuredangle ABC$, entonces $\measuredangle ABE \cong \measuredangle CBE$.

De ello, es claro que $\measuredangle BAD \cong \measuredangle ABE$ y $\triangle ABF$ isósceles de base $\overline{AB}$. Luego, $\overline{AF} \cong \overline{BF}$.



Además, $\measuredangle EFA \cong \measuredangle DFB$ (opuestos por el vértice).

Luego, por ALA, $\triangle EFA \cong \triangle DFB$.

En particular, se tiene: $\overline{EF} \cong \overline{FD}$ y $\overline{AE} \cong \overline{BD}$.

Por suma de segmentos, se tiene $\overline{AD} \cong \overline{BE}$.

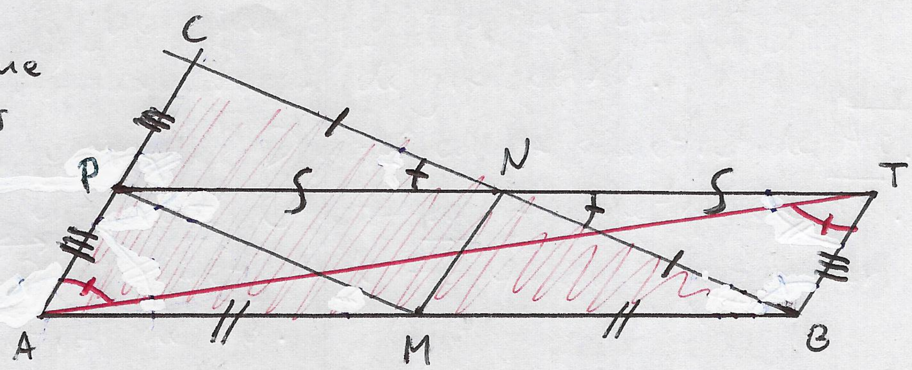
Entonces:
* $\overline{AE} \cong \overline{BD}$
* $\overline{AD} \cong \overline{BE}$
* $\overline{AB}$ lado común

$\therefore$, por LLL, se obtiene $\triangle ABD \cong \triangle BAE$ //.

---

⑥ y ⑦

<u>Hipótesis</u>: $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{BN} \cong \overline{NC}$ } Mediana une los puntos medios



<u>P.D.</u>: ⑥ $\overline{PN} \parallel \overline{AB}$

$\wedge$ ⑦ $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

<u>Dem</u>: Sobre la <u>recta</u> $\overleftrightarrow{PN}$ copiamos al segmento $\overline{PN}$, obteniendo T; es decir, $\overline{PN} \cong \overline{NT}$. Entonces:

* $\overline{CN} \cong \overline{NB}$ (Hipótesis)
* $\overline{PN} \cong \overline{NT}$
* $\measuredangle CNP \cong \measuredangle BNT$ (opuestos por el vértice)

$\therefore$, por LAL, se tiene $\boxed{\triangle CNP \cong \triangle BNT}$

En particular, $\measuredangle TBN \cong \measuredangle PCN$, por lo que $\boxed{\overline{AC} \parallel \overline{BT}}$.

Para aprovechar esto último, trazamos $\overline{AT}$ secante a $\overline{AC}$ y $\overline{BT}$.

Con ello, se tiene $\measuredangle PAT \cong \measuredangle BTA$.

Además, como $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ y $\overline{PC} \cong \overline{BT}$, por transitividad, $\overline{AP} \cong \overline{BT}$.

Entonces: * $\overline{AP} \cong \overline{BT}$ * $\sphericalangle PAT \cong \sphericalangle BTA$ * $\overline{AT}$ lado común

$\therefore$, por LAL, se tiene $\boxed{\triangle PAT \cong \triangle BTA}$.

En particular, $\sphericalangle PTA \cong \sphericalangle BAT$. Por lo tanto, $\overline{PT} \parallel \overline{AB}$ y por ello se concluye que $\overline{PN} \parallel \overline{AB}$ 6 //.

De manera análoga se demuestra que $\overline{PM} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$.

Como $\overline{BT} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{MN}$, entonces $\overline{BT} \parallel \overline{MN}$.

Entonces, $\sphericalangle TBN \cong \sphericalangle BNM$ ($\overline{BN}$ transversal de $\overline{MN}$ y $\overline{BT}$).

Luego, * $\sphericalangle NBM \cong \sphericalangle BNT$ ($\overline{MB} \parallel NT$).

* $\sphericalangle BNM \cong \sphericalangle TBN$ ($\overline{MN} \parallel \overline{BT}$).

* $\overline{BN}$ lado común.

$\therefore$, por ALA, se obtiene $\triangle BNT \cong \triangle NBM$.

Por transitividad, $\triangle CNP \cong \triangle BNT$; de donde $\boxed{\triangle CNP \cong \triangle NBM}$.

En particular, $\overline{PN} \cong MB$. Además, $\overline{AM} \cong \overline{PN}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AM} + \overline{MB} \\ &= \overline{PN} + \overline{PN} \\ \overline{AB} &= 2\,\overline{PN} \iff \boxed{\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB}} \end{aligned}$$

7 //.