UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Apuntes de Ayudantía para FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA II

EDGARD ALEJANDRO ARAYA CARREÑO

Licenciado en Educación Matemática y Computación
Universidad de Santiago de Chile

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -3)

Apuntes de Ayudantía para FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA II

© 2022 EDGARD ALEJANDRO ARAYA CARREÑO

Contenido creado bajo Licencia CC BY-NC-SA 4.0.
Para ver una copia de esta licencia, visite
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ayudantía 1

Lógica y Demostraciones

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

1.1. Expresión algebraica v/s Proposición Lógica

Una **expresión algebraica** se suele definir como una combinación de términos numéricos y términos literales que representan simbólicamente a una cantidad variable (es decir, que puede tomar muchos valores según el caso). Es la forma de generalizar una relación o patrón numérico presente en una secuencia de números.

El tratamiento de una expresión algebraica (es decir, la transformación de una expresión algebraica en otra equivalente) se suele hacer mediante **ecuaciones algebraicas**, en las que se conectan dos expresiones algebraicas mediante la **igualdad** (que corresponde a una relación de equivalencia entre expresiones algebraicas). Ahondaremos en esto último más adelante.

En tanto, una **proposición lógica** se suele definir como una afirmación (no necesariamente matemática) que es susceptible de contar con un **valor de verdad**. Esto quiere decir que **la proposición puede ser verdadera o falsa**. Este valor de verdad puede ser fijo (proposición atómica o compuesta) o variable (función proposicional). Un ejemplo pertinente de proposición podría ser, justamente, una **ecuación algebraica** (debería ser verdadera en el contexto en que se desarrolla).

Es posible formar nuevas proposiciones a partir de otras más simples, mediante **conectivos lógicos** (negación, disyunción, conjunción, implicación, bicondicional, etc.). Asimismo, el tratamiento de las proposiciones lógicas se suele hacer mediante **álgebra proposicional**, conectando dos proposiciones lógicas mediante **equivalencia lógica**.

Así, es evidente que **una expresión algebraica no puede contar con un valor de verdad**, por lo que **no es correcto conectar expresiones algebraicas mediante conectivos lógicos**.

1.2. Tautología v/s Equivalencia lógica

Una **Tautología** es una proposición que es ***siempre verdadera***, independiente de los valores de verdad de sus componentes. En ese caso, su Tabla de Verdad tendrá solamente V en todos los casos. ***No es correcto decir que una proposición es tautología cuando se da un único caso y se concluye que la proposición es verdadera en ese caso***.

Dos proposiciones lógicas se dicen **equivalentes** cuando ellas tienen igual Tabla de Verdad. Es decir, en los mismos casos se obtiene, respectivamente, el mismo valor de verdad.

Otra definición dice que ***dos proposiciones se dicen equivalentes*** $(p \equiv q)$ ***cuando*** $(p \Leftrightarrow q)$ ***es una Tautología***. Notar que en ese caso, la Tabla de Verdad de p será idéntica a la de q, mientras que la Tabla de Verdad de $p \Leftrightarrow q$ tendrá solamente V como resultado.

1.3. Algunas Tautologías

Teorema: Sean p, q, r proposiciones, entonces las siguientes proposiciones son Tautologías:

1. $p \vee \sim p$
2. $\sim (p \wedge \sim p)$
3. $p \Rightarrow p$
4. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
5. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
6. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
7. $p \Rightarrow (p \vee q)$
8. $q \Rightarrow (p \vee q)$
9. $(p \wedge q) \Rightarrow p$
10. $(p \wedge q) \Rightarrow q$
11. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
12. $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
13. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
14. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
15. $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
16. $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
17. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
18. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
19. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
20. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
21. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
22. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$
23. $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]$
24. $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
25. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
26. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
27. $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
28. $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$
29. $[\sim p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Leftrightarrow p$
30. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)]$
    $\Longleftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)]$
31. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow q$
32. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \vee r) \Rightarrow q]$
33. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$
34. $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$
35. $[(p \wedge r) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$
36. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
37. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
38. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
39. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)]$

Tomando como ejemplo la Tautología 19, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $p \Rightarrow q$ es (lógicamente) equivalente a $\sim p \vee q$ (pues sus Tablas de Verdad tienen los mismos valores en los mismos casos).
- $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$ es una Tautología (pues, como los valores de verdad son los mismos en cada caso, entonces la bicondicional es verdadera en cada caso).
- $[p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q] \equiv T$ (o también $[p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q] \equiv V$)

1.4. Demostraciones directas

Dentro de los métodos de demostración aceptados comúnmente en el entorno matemático, se encuentran los siguientes:

1. **Demostración por igualdad:** Consiste en tomar uno de los componentes o lados de la igualdad y desarrollarlo en pasos sucesivos, conectados mediante el signo *igual* ($=$). En este método **se conectan expresiones algebraicas, que no poseen valor de verdad**.

Considerando como contexto el curso Matemática Básica, tomaremos como ejemplo la demostración de la propiedad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]$.

Demostración:

$$\begin{aligned} a(b-c) &= a[b+(-c)] && \text{Definición de Resta en } \mathbb{R} \\ &= ab + a(-c) && \text{Distributividad en } \mathbb{R} \\ &= ab + (-ac) && -(ac) = a(-c) \\ &= ab - ac && \text{Definición de Resta en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\therefore$, $\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]}$ $\square$.

Mientras que al iniciar desde el lado derecho, el desarrollo sería completamente inverso; es decir, comprendería los mismos pasos pero empezando desde el último hacia arriba.

2. **Demostración por equivalencia:** se comienza por una proposición que contempla **un solo paso** de desarrollo de la expresión algebraica mediante una ecuación. Luego, se desarrolla solamente uno de los lados (habitualmente el derecho), mientras el izquierdo permanece inalterado. Cada uno de los pasos se conecta mediante el símbolo *si y sólo si* ($\Leftrightarrow$).

   En este método se conectan proposiciones lógicas cuyos valores de verdad (o bien su tabla de verdad) son idénticas, llegando finalmente a la expresión a demostrar. Para la demostración de la propiedad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]$, se tendría:

Demostración:

$$\begin{aligned} & a(b-c) = a[b+(-c)] && \text{Definición de Resta en } \mathbb{R} \\ \iff & a(b-c) = ab + a(-c) && \text{Distributividad en } \mathbb{R} \\ \iff & a(b-c) = ab + (-ac) && -(ac) = a(-c) \\ \iff & a(b-c) = ab - ac && \text{Definición de Resta en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\therefore$, $\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]}$ $\square$.

Nuevamente, al iniciar desde el lado derecho, el desarrollo sería completamente inverso; es decir, comprendería los mismos pasos pero empezando desde: $ab - ac = ab + (-ac)$.

3. **Demostración por transitividad:** este método es muy similar a la demostración por igualdad.

   En una primera etapa, se inicia con el lado izquierdo de la igualdad a demostrar (digamos A) hasta llegar a una expresión que no se puede desarrollar más (digamos B), ya sea por dificultades de las propiedades a utilizar o por no contar con un argumento para continuar.

   En una segunda etapa, se inicia con el lado derecho de la igualdad a demostrar (digamos C), llegando usualmente a la misma expresión (B) obtenida en la primera etapa. Luego, por ***transitividad de la igualdad***, como $A = B$ y $C = B$, entonces $A = C$, concluyendo la demostración.

   Para la propiedad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]$, se tendría:

Demostración:

$$\begin{aligned} a(b-c) &= a[b+(-c)] && \text{Definición de Resta en } \mathbb{R} \\ &= ab + a(-c) && \text{Distributividad en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab - ac &= ab + (-ac) && \text{Definición de Resta en } \mathbb{R} \\ &= ab + a(-c) && -(ac) = a(-c) \end{aligned}$$

$\therefore$, $\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]}$ $\square$.

1.5. Búsqueda de una demostración (BORRADOR)

Este método suele ofrecer dudas respecto de su carácter de demostración formal, debido a su enorme similitud con la demostración por transitividad.

La técnica consiste en ***partir de la proposición a demostrar*** y, mediante equivalencias, ir trabajando simultáneamente ambos lados de la proposición hasta llegar a una igualdad evidente. Allí, la búsqueda termina, pues al ser las proposiciones equivalentes y la última de ellas una verdad evidente, entonces todas las expresiones son verdaderas.

Como no se evidencia la transitividad de la igualdad de forma explícita, se suele decir que este tipo de demostración no es válida; sin embargo, ***la equivalencia de las proposiciones y la veracidad de la última proposición justifican plenamente la validez de la demostración***.

Para evitar la inquietud, se recomienda presentar esta búsqueda con la leyenda **BORRADOR** y, a continuación, escribir la demostración correspondiente usando alguno de los métodos anteriores. Incluso, se suele aceptar una versión resumida de la demostración (reescrita), considerando que lo esencial de la misma ya se encuentra expresado en el BORRADOR.

En el caso de demostración de la propiedad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ [a(b-c) = ab - ac]$, se tendría:

BORRADOR:

$$a(b-c) = ab - ac \qquad \text{Definición de Resta en } \mathbb{R}$$
$$\iff a[b + (-c)] = ab + (-ac) \qquad \text{Distributividad en } \mathbb{R} \text{ y } a(-c) = -ac$$
$$\iff ab + a(-c) = ab + a(-c) \qquad \text{Igualdad evidente}$$

En este caso, se tienen las siguientes equivalencias: $A = B \iff C = D \iff E = E$.

En algunos contextos se acepta como demostración a esta técnica, generalmente en los cursos de Matemática en la enseñanza superior de pregrado. Sin embargo, ***para el caso de este Curso, se sugiere seguir la recomendación dada*** (BORRADOR).

1.6. Demostración por Contrapositivo

En palabras simples, si la afirmación que buscamos demostrar es $p \Rightarrow q$, entonces esta afirmación se reemplaza por $\sim q \Rightarrow \sim p$, que es lógicamente equivalente.

Ejemplos ilustres:

- Demostrar que una función es **inyectiva**.
  Proposición original: $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$
  Contrapositiva: $f(x) = f(y) \implies x = y$

- Demostrar que si un cuadrado de un número es par, entonces el número era par.
  Proposición original: p^2 par $\implies p$ par
  Contrapositiva: p impar $\implies p^2$ impar

  Demostración: p impar $\implies p = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \implies p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underline{2}(2k^2 + 2k)\underline{+1}$
  $\implies p^2 = 2m + 1, m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \implies p^2$ impar $\square$.

1.7. Demostración por Contradicción

En algunos casos es muy similar a la demostración por Contrapositivo, pues para demostrar que $p \Rightarrow q$ es verdadero, se reemplaza por demostrar que $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$. Notar que en este caso, se relacionan dos proposiciones de forma explícita.

En el resto de los casos, se busca demostrar que una cierta proposición q es verdadera. Se supone que q es falsa y se llega a que alguna proposición p (verdadera de antemano) sería falsa. Como eso no es posible, por contradicción, q será verdadera.

Ejemplos ilustres:

- p^2 par $\implies p$ par

  Demostración: Suponer que $\boxed{p^2 \text{ es par}}$ y, por contradicción, que p impar.
  $\implies p = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \implies p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$
  $\implies p^2 = 2m+1, m = 2k^2+2k \in \mathbb{Z} \implies \boxed{p^2 \text{ es impar}}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

- (Definición de resta en $\mathbb{R}$) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $c + b = a$.

  Demostración: (Existencia) Vemos que $c = b + (-a)$ cumple con $c + b = a$.
  (Unicidad) Supongamos que ***existe otro*** $\boxed{c_1 \neq c}$ tal que $c_1 + b = a$.
  Entonces, por transitividad de la igualdad, $c + b = c_1 + b$. Luego, por Ley Cancelativa (i.e., sumar $(-b)$ en ambos lados) se obtiene $\boxed{c = c_1}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

- No existe inverso multiplicativo de $0 \in \mathbb{R}$.

  Demostración: Suponer que sí existe 0^{-1}. Entonces:
  $\boxed{1 = 1+0} \implies 1 \cdot 0^{-1} = (0+1) \cdot 0^{-1} \implies 1 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} + 1 \cdot 0^{-1} \implies 1 \cdot 0^{-1} = 1 + 1 \cdot 0^{-1}$
  $\implies 1 \cdot 0^{-1} - 1 \cdot 0^{-1} = 1 + (1 \cdot 0^{-1} - 1 \cdot 0^{-1}) \implies 0 = 1 + 0 \implies \boxed{0 = 1}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

1.8. Contraejemplo

Es muy raro encontrarse con proposiciones que sean falsas; sin embargo, a veces puede ser el objetivo explícito de una pregunta ***demostrar que la proposición es falsa*** o bien se espera ver si el estudiante es capaz de cuestionar la veracidad de una afirmación *sospechosamente parecida* a alguna que conocemos.

Lógicamente, estas afirmaciones constan (de forma explícita o invisible) de un cuantificador universal (para todo $\forall$). Su negación lógica sería un cuantificador existencial (existe $\exists$), pues ***basta con que un solo caso falle para echar abajo la proposición***.

Ejemplos ilustres:

- Todo número entero impar es primo (falso, pues $9 \in \mathbb{Z}$ es divisible por 3, además de 1 y 9).
- La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^2$ es inyectiva ($x = 1 \wedge y = -1 (x \neq y)$ pero $f(x) = f(y) = 1$).

Ayudantía 2

Funciones y sus Propiedades

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

2.1. Funciones y sus Propiedades

2.1.1. Ejercicios Propuestos

2.1. (Solución 2.1) **Si** $f : A \to B$ **y** $g : B \to C$ **son tales que** $g \circ f$ **es sobreyectiva, entonces** g **es sobreyectiva**.

2.2. (Solución 2.2) **Si** $f : A \to B$ **y** $g : B \to C$ **son tales que** $g \circ f$ **es inyectiva, entonces** f **es inyectiva**.

2.3. (Solución 2.3) **Si** $f : A \to B$ **y** $g : B \to A$ **son tales que** $g \circ f = Id_A$**, entonces** f **es inyectiva y** g **es sobreyectiva**.

2.4. (Solución 2.4) **Si** $f : A \to B$ **y** $g : B \to A$ **tal que** $f \circ g = Id_B$**, entonces** f **es sobreyectiva y** g **es inyectiva**.

2.5. (Solución 2.5) **Sean** A, B, C, D **conjuntos no vacíos y** $f : A \longrightarrow B$**,** $g : B \longrightarrow C$**,** $h : C \longrightarrow D$ **funciones tales que** $g \circ f$ **y** $h \circ g$ **son biyectivas. Demostrar que** f, g, h **son biyectivas**.

2.6. (Solución 2.6) **Sean** A, B **conjuntos,** $S, T \subseteq B$ **y** $f : A \longrightarrow B$ **una función. Demuestre que si** $S \subseteq T$**, entonces** $f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(T)$.
HINT: $f^{-1}(S)$ se refiere al conjunto de todas las preimágenes de S, lo que quiere decir que si $x \in f^{-1}(S)$, entonces $f(x) \in S$.

2.7. (Solución 2.7) **Si** $f : A \longrightarrow B$ **y** $g : B \longrightarrow C$ **son inyectivas, entonces** $g \circ f$ **es inyectiva**.

2.8. (Solución 2.8) **Si** $f : A \longrightarrow B$ **y** $g : B \longrightarrow C$ **son sobreyectivas, entonces** $g \circ f$ **es sobreyectiva**.

2.9. (Solución 2.9) **Si** $f : A \longrightarrow B$ **y** $g : B \longrightarrow C$ **son biyectivas, entonces** $g \circ f$ **es biyectiva**.

2.10. (Solución 2.10) **Si entre las funciones** $f \circ g \circ h$**,** $g \circ h \circ f$ **y** $h \circ f \circ g$ **hay dos inyectivas y una sobreyectiva, demostrar que** f, g, h **son biyectivas**.

DEFINICIÓN 2.1. Dada $f : A \longrightarrow B$ y $A_1 \subseteq A$, se define la ***restricción de*** f ***a*** A_1 como $f|_{A_1} : A_1 \longrightarrow B$ tal que $f|_{A_1}(x) = f(x)$.

2.11. (Solución 2.11) **Si** $f : A \longrightarrow B$ **es inyectiva y** $A_1 \subseteq A$**, demostrar que** $f|_{A_1}$ **es inyectiva y NO es sobreyectiva**.

DEFINICIÓN 2.2. Dada $f : A \longrightarrow B$, se define la ***restricción de*** f ***a su recorrido*** como $\hat{f} : A \longrightarrow \mathrm{Im}(A)$ tal que $\hat{f}(x) = f(x)$.

2.12. (Solución 2.12) **Si** $f : A \longrightarrow B$ **es inyectiva, demostrar que** $\hat{f}$ **es biyectiva**.

2.1.2. Una solución para los Ejercicios

2.1. (Ejercicio 2.1) ***Solución.*** Para demostrar que g es sobreyectiva, basta con demostrar que $C \subseteq \mathrm{Rec}(g)$. Por hipótesis, sabemos que $g \circ f$ es sobreyectiva; es decir, que $\mathrm{Rec}(g \circ f) = C$. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} c \in C &\Longrightarrow \exists a \in A : (c = g \circ f(a)) \\ (g \circ f(a) = g(f(a))) &\Longrightarrow c = g(f(a)) \\ (f(a) = b \in B) &\Longrightarrow c = g(b) \end{aligned}$$

Entonces, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$, por lo que $c \in \mathrm{Rec}(g)$. Luego, $C \subseteq \mathrm{Rec}(g)$.

Como además $\mathrm{Rec}(g) \subseteq C$ por definición de Recorrido, se obtiene $\mathrm{Rec}(g) = C$ y la función g es sobreyectiva. □

2.2. (Ejercicio 2.2) ***Solución.*** f es inyectiva, pues:

$$\begin{aligned} f(a_1) = f(a_2) &\Longrightarrow g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \\ \text{(Hipótesis)} &\Longrightarrow a_1 = a_2 \end{aligned}$$

□

2.3. (Ejercicio 2.3) ***Solución.*** f es inyectiva, pues si $x, y \in A$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \\ \text{(Hipótesis)} &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

Ahora, para demostrar que g es sobreyectiva, basta con demostrar que $A \subseteq \mathrm{Rec}(g)$:

$$\begin{aligned} a \in A &\Longrightarrow f(a) = b \ \wedge b \in B \\ &\Longrightarrow g \circ f(a) = g(b) \ \wedge g(b) \in \mathrm{Rec}(g) \\ \text{(Hipótesis)} &\Longrightarrow a = g(b) \ \wedge g(b) \in \mathrm{Rec}(g) \\ &\Longrightarrow a \in \mathrm{Rec}(g) \end{aligned}$$

Como además $\mathrm{Rec}(g) \subseteq A$ por definición de Recorrido, se obtiene $\mathrm{Rec}(g) = A$ y la función g es sobreyectiva. □

2.4. (Ejercicio 2.4) ***Solución.*** g es inyectiva, pues si $x, y \in B$, se tiene:

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Longrightarrow f \circ g(x) = f \circ g(y) \\ \text{(Hipótesis)} &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

Ahora, para demostrar que f es sobreyectiva, basta con demostrar que $B \subseteq \mathrm{Rec}(f)$:

$$\begin{aligned} b \in B &\Longrightarrow g(b) = a \ \wedge a \in A \\ &\Longrightarrow f \circ g(b) = f(a) \ \wedge f(a) \in \mathrm{Rec}(f) \\ \text{(Hipótesis)} &\Longrightarrow b = f(a) \ \wedge f(a) \in \mathrm{Rec}(f) \\ &\Longrightarrow b \in \mathrm{Rec}(f) \end{aligned}$$

Como además $\mathrm{Rec}(f) \subseteq B$ por definición de Recorrido, se obtiene $\mathrm{Rec}(f) = B$ y la función f es sobreyectiva. □

2.5. (Ejercicio 2.5) ***Solución.*** Como $g \circ f$ es biyectiva, en particular es inyectiva y sobreyectiva. Mismo para $h \circ g$.

- Como $g \circ f$ es inyectiva, por Ejercicio 2.2 se obtiene que f **es inyectiva (1)**.
- Como $g \circ f$ es sobreyectiva, por Ejercicio 2.1 se obtiene que g **es sobreyectiva (2)**.
- Como $h \circ g$ es inyectiva, por Ejercicio 2.2 se obtiene que g **es inyectiva (3)**.
- Como $h \circ g$ es sobreyectiva, por Ejercicio 2.1 se obtiene que h **es sobreyectiva (4)**.

De **(2)** y **(3)** se obtiene de inmediato que g **es biyectiva**. Falta demostrar que f es sobreyectiva y que h es inyectiva.

Por Contradicción, suponemos que f no es sobreyectiva. Esto significa que $\text{Rec}(f) \subseteq B$ pero $\text{Rec}(f) \neq B$. Así, dado $b \in B - \text{Rec}(f)$, se cumple que para todo $a \in A$ es cierto que $\boxed{b \neq f(a)}$. Como g es biyectiva, entonces dado $b \in B$, existe un único $c \in C$ tal que $c = g(b)$. Como $g \circ f$ es biyectiva, entonces existe un único $a \in A$ tal que $c = g \circ f(a)$. Es decir, $c = g[f(a)]$.

Así, por Transitividad, se obtiene $g[f(a)] = g[b]$; luego, como g es inyectiva, se concluye que $\boxed{b = f(a)}$, lo que contradice que f no es sobreyectiva. Por lo tanto, f **es sobreyectiva (5)**.

También por Contradicción, suponemos que h no es inyectiva. Es decir, existen $c_1, c_2 \in C$ tales que $\boxed{c_1 \neq c_2}$ y que $h(c_1) = h(c_2)$.

Como g es sobreyectiva, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $c_1 = g(b_1)$ y $c_2 = g(b_2)$. Como $h \circ g$ es inyectiva, entonces para todo $b_1, b_2 \in B$ se cumple $h(c_1) = h(c_2) \implies h \circ g(b_1) = h \circ g(b_2) \implies b_1 = b_2$.

Por otra parte, como g es biyectiva, entonces existe $g^{-1} : C \longrightarrow B$ y, además, g^{-1} es biyectiva. En particular, g^{-1} es sobreyectiva, por lo que $b_1 = g^{-1}(c_1)$ y $b_2 = g^{-1}(c_2)$. Además, g^{-1} es inyectiva, por lo que $b_1 = b_2 \implies g^{-1}(c_1) = g^{-1}(c_2) \implies \boxed{c_1 = c_2}$. Esto contradice que h no es inyectiva, por lo que se demuestra que h **es inyectiva (6)**.

Finalmente, de **(1)** y **(5)** se concluye que f **es biyectiva**, mientras que de **(4)** y **(6)** se concluye que h **es biyectiva**. □

2.6. (Ejercicio 2.6) ***Solución.*** Suponemos que $S \subseteq T$ y sea $\boxed{x \in f^{-1}(S)}$.

Por definición del conjunto $f^{-1}(S)$, se tiene que existe $y \in S$ tal que $y = f(x)$. Como S está contenido en T, entonces $y \in T$. **Entonces**, existe $y \in T$ tal que $y = f(x)$, por lo que $\boxed{x \in f^{-1}(T)}$. Como lo anterior es válido para cualquier y, se concluye que $f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(T)$. □

2.7. (Ejercicio 2.7) ***Solución.*** Como f y g son inyectivas, se tiene que para todo $a_1, a_2 \in A$ se cumple $(f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2)$ y que para todo $b_1, b_2 \in B$ se cumple $(g(b_1) = g(b_2) \implies b_1 = b_2)$.

Ahora, demostrando lo solicitado para $a_1, a_2 \in A$:

$$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \implies g[f(a_1)] = g[f(a_2)] \overset{g \text{ inyectiva}}{\implies} f(a_1) = f(a_2) \overset{f \text{ inyectiva}}{\implies} a_1 = a_2$$

Por lo tanto, se concluye que $g \circ f$ es inyectiva. □

2.8. (Ejercicio 2.8) ***Solución.*** Como f y g son sobreyectivas, se obtiene que $\text{Rec}(f) = B$ y que $\text{Rec}(g) = C$.

Entonces, $g \circ f : A \longrightarrow C$ es tal que todo elemento $f(x) \in B$ tendrá su respectivo $x \in A$ (por ser f sobreyectiva) y todo elemento $g[f(x)] \in C$ tendrá su respectivo $f(x) \in B$ (por ser g sobreyectiva). Luego, todo elemento $g[f(x)] \in C$ tendrá su respectivo $x \in A$.

Por lo tanto, $\text{Rec}(g \circ f) = C$ y $g \circ f$ será sobreyectiva. □

2.9. (Ejercicio 2.9) ***Solución.*** (*Directa*) Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ biyectivas. Hacemos $h : A \longrightarrow C$ tal que $h(x) = g \circ f(x)$. Considerar también que $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

i. Inyectividad. Para todo $x_1, x_2 \in A$ se tiene:

$$\begin{aligned} g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) &\implies g[f(x_1)] = g[f(x_2)] && / \ g \text{ inyectiva} \\ &\implies f(x_1) = f(x_2) && / \ f \text{ inyectiva} \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

ii. Sobreyectividad. Demostraremos que $C \subseteq \text{Rec}(g \circ f)$:

$$\begin{aligned} & z \in C \\ \implies & \exists y \in B = \text{Dom}(g) \ : \ z = g(y) \ \wedge \ \exists x \in A = \text{Dom}(f) \ : \ y = f(x) && / \ f, g \text{ sobreyectiva} \\ \implies & \exists y \in B = \text{Dom}(g) \ : \ z = g(y) \ \wedge \ \exists x \in A = \text{Dom}(g \circ f) \ : \ g[y] = g[f(x)] \\ \implies & \exists x \in A = \text{Dom}(g \circ f) \ : \ z = g[f(x)] && / \ g \circ f(x) = g[f(x)] \\ \implies & \exists x \in A = \text{Dom}(g \circ f) \ : \ z = g \circ f(x) \end{aligned}$$

Finalmente, como $g \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

(*Indirecta*) Como f y g son biyectivas, en particular f y g son inyectivas. Luego, por Ejercicio 2.7, se concluye que $g \circ f$ es inyectiva.

Por otra parte, de f y g sobreyectivas se deduce que f y g son sobreyectivas. Luego, por Ejercicio 2.8, se concluye que $g \circ f$ es sobreyectiva.

Finalmente, como $g \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva, se concluye que $g \circ f$ es biyectiva. □

2.10. (Ejercicio 2.10) ***Solución.*** Sin perder generalidad (SPG), supondremos que $f \circ g \circ h$ es inyectiva, que $g \circ h \circ f$ es inyectiva y que $h \circ f \circ g$ es sobreyectiva.

Como $(f \circ g) \circ h$ es inyectiva, por Ejercicio 2.2 se obtiene que h es inyectiva. Como $h \circ (f \circ g)$ es sobreyectiva, por Ejercicio 2.1 se obtiene que h es sobreyectiva. Por lo tanto, h **es biyectiva**.

Como $(g \circ h) \circ f$ es inyectiva, por Ejercicio 2.2 se obtiene que f es inyectiva. Como h es biyectiva, entonces existe h^{-1} y además es biyectiva. En particular, h^{-1} es sobreyectiva. Por Ejercicio 2.8, se concluye que $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ es sobreyectiva. Luego, por Ejercicio 2.1, se concluye que f es sobreyectiva. Por lo tanto, f **es biyectiva**.

Recordemos que $f \circ g$ es sobreyectiva. Como h^{-1} es biyectiva, en particular es inyectiva. Así, por Ejercicio 2.7, vemos que $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ es inyectiva. Luego, se concluye que $f \circ g$ **es biyectiva**. Además, a partir de f biyectiva se obtiene f^{-1} biyectiva.

Finalmente, por Ejercicio 2.9, se concluye que $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ **es biyectiva**. □

2.11. (Ejercicio 2.11) ***Solución.*** Como f es inyectiva, entonces para todo $a_1, a_2 \in A$ se cumple $(f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2)$. Si ahora consideramos $a_3, a_4 \in A_1 \subseteq A$, se debe seguir cumpliendo lo mismo:

$$f|_{A_1}(a_3) = f|_{A_1}(a_4) \implies f(a_3) = f(a_4) \implies a_3 = a_4$$

Así, vemos que $f|_{A_1}$ es inyectiva.

Para demostrar que $f|_{A_1}$ no es sobreyectiva, supondremos por Contradicción que sí lo es. Esto quiere decir que para todo $b \in B$ existe $a \in A_1$ tal que $b = f|_{A_1}(a)$.

Considerando la definición de $f|_{A_1}$, se tendría que para todo $b \in B$ existe $a \in A_1$ tal que $b = f(a)$. Así, se obtendría que $\mathrm{Dom}(f) = A_1$ (y ya vimos que $\mathrm{Dom}(f) = A$, por lo que esto es una contradicción). Por lo tanto, $f|_{A_1}$ **no puede ser sobreyectiva**. □

2.12. (Ejercicio 2.12) ***Solución.*** Es inmediato que $\hat{f}$ es sobreyectiva, pues $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Rec}(\hat{f}) = \mathrm{Rec}(f)$. Ahora, como f es inyectiva, veremos que $\hat{f}$ también es inyectiva, considerando $a_1, a_2 \in A$:

$$\hat{f}(a_1) = \hat{f}(a_2) \implies f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

Por lo tanto, $\hat{f}$ **es biyectiva**. □

Ayudantía 3

Relaciones

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

3.1. Relación de Equivalencia

3.1.1. Definiciones

- Dado $A \times B$, se dice que $\mathcal{R}$ es una ***relación*** de A en B si $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Un elemento de la relación será un par ordenado $(a, b) \in \mathcal{R}$.
- En general, cuando las relaciones se construyan en $A \times A$, se puede decir que la relación es sobre A^2 (o incluso a veces se dice, lisa y llanamente, que la relación es sobre A).
- Cuando el contexto lo permita (cuando se trata de relación entre elementos **y no entre pares ordenados**), se puede reescribir $(a, b) \in \mathcal{R}$ por $a\mathcal{R}y$.
- Sea $\mathcal{R}$ una relación sobre $A^2 \neq \varnothing$. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre A^2 si se cumple:

  I. $\mathcal{R}$ es refleja en A^2: $\forall x \in A^2\ [(x, x) \in \mathcal{R}]$

  II. $\mathcal{R}$ es simétrica en A^2: $\forall x, y \in A^2\ [(x, y) \in \mathcal{R}\ \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}]$

  III. $\mathcal{R}$ es transitiva en A^2: $\forall x, y, z \in A^2\ [(x, y) \in \mathcal{R}\ \wedge (y, z) \in \mathcal{R}\ \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}]$

- Cuando una relación $\mathcal{R}$ en A^2 es refleja, automáticamente su dominio y su recorrido son A.
- Una vez que $\mathcal{R}$ en A^2 es de equivalencia, es posible establecer en A la ***clase de equivalencia*** de un elemento $x \in A$:

$$\boxed{\overline{x} = [x]_{\mathcal{R}} = \{\ y \in A\ :\ (x, y) \in \mathcal{R}\ \}}$$

3.1.2. ¿Para qué servirán?

- Esta propiedad es muy importante: **dos clases de equivalencia son iguales si los elementos que la generan están relacionados**. Es decir, $\boxed{[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}} \iff x\ \mathcal{R}\ y}$
- Propiedades importantes de las clases de equivalencia:
  - Toda relación de equivalencia sobre A^2 define una partición sobre A.
  - Todo elemento de A pertenece a alguna clase de equivalencia.
  - La partición de A bajo $\mathcal{R}$ es disjunta.
- Se llamará ***conjunto cuociente de*** A ***dado*** $\mathcal{R}$ (y se denota $A/\mathcal{R}$) al conjunto de todas las clases de equivalencia definidas por $\mathcal{R}$ sobre el conjunto A.

3.1.3. Un ejemplo de Relación de Equivalencia:

En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$, definimos la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \iff \exists z \in \mathbb{Z}(x - y = 3z) \text{ (Congruencia módulo 3)}$$

Primero, veremos que es una relación de equivalencia:

I. $\mathcal{R}$ es refleja: $x - x = 0 = 3 \cdot 0 \ (0 \in \mathbb{Z}) \iff \boxed{(x, x) \in \mathcal{R}}$

II. $\mathcal{R}$ es simétrica: $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow x - y = 3z \Rightarrow y - x = -3z = 3(-z) \Rightarrow \boxed{(y, x) \in \mathcal{R}}$

III. $\mathcal{R}$ es transitiva: $(x, y) \in \mathcal{R} \ \wedge \ (y, z) \in \mathcal{R} \implies x - y = 3z \ \wedge y - z = 3w$
$\implies (x - y) + (y - z) = 3z + 3w \implies x - z = 3(z + w) \boxed{(x, z) \in \mathcal{R}}$

Como $\mathcal{R}$ es de equivalencia, podemos determinar las clases de equivalencia:

$$[0]_{\mathcal{R}} = \{ \ y \in \mathbb{Z} \ : \ (0, y) \in \mathcal{R} \ \}$$
$$\implies y \in [0]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow 0 - y = 3z \Leftrightarrow \boxed{y = -3z}$$
$$\implies [0]_{\mathcal{R}} = \{ \ (0, -3z), z \in \mathbb{Z} \ \} \ = \ \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

$$[1]_{\mathcal{R}} = \{ \ y \in \mathbb{Z} \ : \ (1, y) \in \mathcal{R} \ \}$$
$$\implies y \in [1]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow 1 - y = 3z \Leftrightarrow \boxed{y = -3z + 1}$$
$$\implies [1]_{\mathcal{R}} = \{ \ (0, -3z + 1), z \in \mathbb{Z} \ \} \ = \ \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

$$[2]_{\mathcal{R}} = \{ \ y \in \mathbb{Z} \ : \ (2, y) \in \mathcal{R} \ \}$$
$$\implies y \in [2]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow 2 - y = 3z \Leftrightarrow \boxed{y = -3z + 2}$$
$$\implies [2]_{\mathcal{R}} = \{ \ (0, -3z + 2), z \in \mathbb{Z} \ \} \ = \ \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

$[3]_{\mathcal{R}} = [0]_{\mathcal{R}}$ pues $3 \in [0]_R$ (o bien $3\mathcal{R}0$).

Así, las clases de equivalencia definidas por $\mathcal{R}$ forman una partición disjunta de $\mathbb{Z}$.

3.1.4. Ejercicios propuestos

3.1. (Solución 3.1) **Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en $\mathbb{Z}$ por:**

$$(x, y) \in \mathcal{R} \iff x\mathcal{R}y \iff \exists z \in \mathbb{Z}(x - y = 5z)$$

a. Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

b. Determinar la clase de equivalencia de 0; es decir, $[0]_{\mathcal{R}}$.

c. Determinar $[1]_{\mathcal{R}}$.

d. Determinar $[8]_{\mathcal{R}}$.

3.2. (Solución 3.2) **En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:**

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a + d = b + c$$

a. Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b. Determinar la clase de equivalencia de $(1, 1)$; es decir, $[(1, 1)]_{\mathcal{R}}$.

3.3. (Solución 3.3) **Sea $n \in \mathbb{N}$ y definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ por:**

$$(a,b) \in \mathcal{R} \iff (a-b) \text{ es múltiplo de } n$$

a. Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b. Determinar la clase de equivalencia de 0; es decir, $[0]_{\mathcal{R}}$.

3.4. (Solución 3.4) **En $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ se define la relación:**

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a \cdot d = b \cdot c$$

a. Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b. Determinar la clase de equivalencia de $(3,7)$; es decir, $[(3,7)]_{\mathcal{R}}$.

3.5. (Solución 3.5) **En $\mathbb{Q}^+$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:**

$$(a,b) \in \mathcal{R} \iff \exists p \in \mathbb{Z} \ : \ (a \cdot b^{-1} = 3^p)$$

a. Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b. Determinar la clase de equivalencia de 2; es decir, $[2]_{\mathcal{R}}$.

3.6. (Solución 3.6) **En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:**

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff d - b = 2(c-a)$$

a. Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b. Determinar la clase de equivalencia de $(1,2)$; es decir, $[(1,2)]_{\mathcal{R}}$.

3.7. (Solución 3.7) **Sea $\mathcal{R}$ una relación refleja y transitiva definida sobre un conjunto $E \neq \varnothing$. Sobre E se define la relación $\mathcal{S}$ por:**

$$x\mathcal{S}y \iff x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\mathcal{R}x$$

Demostrar que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia en E.

3.8. (Solución 3.8) **Suponiendo que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son relaciones de equivalencia sobre A^2, demostrar que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es relación de equivalencia**.

3.1.5. Una solución para los Ejercicios

3.1. (Ejercicio 3.1) ***Solución.***
a. La relación es refleja, pues $x - x = 0 = 5 \cdot 0, 0 \in \mathbb{Z}$.

La relación es simétrica. Dado $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 5z, z \in \mathbb{Z}$, se obtiene $y - x = -(x-y) = -(5z) = 5(-z), (-z) \in \mathbb{Z}$.

La relación es transitiva. Dados $x\mathcal{R}y \Rightarrow x - y = 5p, p \in \mathbb{Z}$ e $y\mathcal{R}z \Rightarrow y - z = 5q, q \in \mathbb{Z}$, se obtiene $x - z = x - z + y - y = (x-y) + (y-z) = (5p) + (5q) = 5(p+q), p+q \in \mathbb{Z}$.

b. $[0]_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y \ \mathcal{R} \ 0\} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y - 0 = 5z\} = \{5z, z \in \mathbb{Z}\}$.

c. $[1]_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y \ \mathcal{R} \ 1\} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y - 1 = 5z\} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y = 5z + 1\} = \{5z+1, z \in \mathbb{Z}\}$.

d. $[8]_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y \ \mathcal{R} \ 8\} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y - 8 = 5z\} = \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y = 5z + 8\}$
$= \{y \in \mathbb{Z} \ : \ y = (5z+5) + 3\} = \{5(z+1) + 3, z \in \mathbb{Z}\}$ □

3.2. (Ejercicio 3.2) ***Solución.***
a. La relación es refleja, pues $(a,b)\mathcal{R}(a,b) \Leftrightarrow a + b = b + a$.

La relación es simétrica. Dado $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, se obtiene $c + b = a + d$, de donde se obtiene $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.

La relación es transitiva. Dados $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Leftrightarrow c+f = d+e$, se obtiene $a+d+f = b+c+f$ y $b+c+f = b+d+e$. Por transitividad, se sigue que $a+d+f = b+d+e$, de donde sigue $a + f = b + e$ y se obtiene $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$

b. $[(1,1)]_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ (x,y)\mathcal{R}(1,1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ x + 1 = y + 1\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ x = y\} = \{(x,x), x \in \mathbb{N}\}$ □

3.3. (Ejercicio 3.3) ***Solución.***
a. La relación es refleja, pues $a-a=0=n\cdot 0$ (es múltiplo de n).

La relación es simétrica. Dado $(a,b)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow a-b=n\cdot p, p\in\mathbb{Z}$, se obtiene $b-a=-(a-b)=-(n\cdot p)=n\cdot(-p), p\in\mathbb{Z}$, de donde se obtiene $(b,a)\in\mathcal{R}$.

La relación es transitiva. Dados $(a,b)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow a-b=n\cdot p, p\in\mathbb{Z}$ y $(b,c)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow b-c=n\cdot q, q\in\mathbb{Z}$, se obtiene $a-c=a-c+b-b=(a-b)+(b-c)=(n\cdot p)+(n\cdot q)=n\cdot(p+q), p+q\in\mathbb{Z}$.

b. $[0]_{\mathcal{R}}=\{a\in\mathbb{Z}\ :\ a\,\mathcal{R}\,0\}=\{a\in\mathbb{Z}\ :\ a-0=n\cdot p, p\in\mathbb{Z}\}=\{n\cdot p, p\in\mathbb{Z}\}$ □

3.4. (Ejercicio 3.4) ***Solución.***
a. La relación es refleja, pues $(a,b)\mathcal{R}(a,b)\Leftrightarrow a\cdot b=b\cdot a$.

La relación es simétrica. Dado $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$, se obtiene $c\cdot b=a\cdot d$, de donde se obtiene $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.

La relación es transitiva. Dados $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)\Leftrightarrow c\cdot f=d\cdot e$, se obtiene $(a\cdot d)\cdot f=(b\cdot c)\cdot f$ y $b\cdot(c\cdot f)=b\cdot(d\cdot e)$. Por transitividad, se sigue que $(a\cdot d)\cdot f=b\cdot(d\cdot e)$, de donde sigue $(a\cdot f)\cdot d=d\cdot(b\cdot e)$ y de allí se obtiene $a\cdot f=b\cdot e$. Por lo tanto, $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$

b. $[(3,7)]_{\mathcal{R}}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\ :\ (x,y)\mathcal{R}(3,7)\}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\ :\ x\cdot 7=y\cdot 3\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\ :\ 7x=3y\}$
No se puede hacer más, pues son enteros!!! □

3.5. (Ejercicio 3.5) ***Solución.***
a. La relación es refleja, pues $(a,a)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow a\cdot a^{-1}=1=3^0, 0\in\mathbb{Z}$.

La relación es simétrica. Dado $(a,b)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow a\cdot b^{-1}=3^p$, se obtiene $b\cdot a^{-1}=(a\cdot b^{-1})^{-1})=(3^p)^{-1}=3^{-p}, -p\in\mathbb{Z}$.

La relación es transitiva. Dados $(a,b)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow a\cdot b^{-1}=3^p$ y $(b,c)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow b\cdot c^{-1}=3^q$, se obtiene $a\cdot c^{-1}=(a\cdot b^{-1})\cdot(b\cdot c^{-1})=(3^p)\cdot(3^q)=3^{p+q}, p+q\in\mathbb{Z}$.

b. $[2]_{\mathcal{R}}=\{x\in\mathbb{Q}^+\ :\ (x,2)\in\mathcal{R}\}=\{x\in\mathbb{Q}^+\ :\ x\cdot 2^{-1}=3^p\}=\{x\in\mathbb{Q}^+\ :\ x=2\cdot 3^p\}=\{2\cdot 3^p, p\in\mathbb{Z}\}$ □

3.6. (Ejercicio 3.6) ***Solución.***
a. La relación es refleja, pues $(a,b)\mathcal{R}(a,b)\Leftrightarrow b-b=0=2(a-a)$.

La relación es simétrica. Dado $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow d-b=2(c-a)$, se obtiene $b-d=-(d-b)=-2(c-a)=2(a-c)$, de donde se obtiene $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.

La relación es transitiva. Dados $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow d-b=2(c-a)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)\Leftrightarrow f-d=2(e-c)$, se obtiene $f-b=(f-d)+(d-b)=2(e-c)+2(c-a)=2(e-a)$. Por lo tanto, $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$

b. $[(1,2)]_{\mathcal{R}}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ (x,y)\mathcal{R}(1,2)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ 2-x=2(1-y)\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ 2-x=2-2y\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ 2y=x\}$
$=\{(2y,y), y\in\mathbb{R}\}$ □

3.7. (Ejercicio 3.7) ***Solución.*** La relación $\mathcal{S}$ es refleja, pues $x\mathcal{S}x\implies x\mathcal{R}x\ \wedge\ x\mathcal{R}x$ y ya sabemos que la relación $\mathcal{R}$ es refleja.

La relación $\mathcal{S}$ es simétrica, pues $x\mathcal{S}y\implies x\mathcal{R}y\ \wedge\ y\mathcal{R}x\implies y\mathcal{R}x\ \wedge\ x\mathcal{R}y\implies y\mathcal{S}x$.

La relación $\mathcal{S}$ es transitiva, pues $x\mathcal{S}y\ \wedge\ y\mathcal{S}z\implies(x\mathcal{R}y\ \wedge\ y\mathcal{R}x)\ \wedge\ (y\mathcal{R}z\ \wedge\ z\mathcal{R}y)$
$\implies(x\mathcal{R}y\ \wedge y\mathcal{R}z)\ \wedge\ (z\mathcal{R}y\ \wedge\ y\mathcal{R}x)$.

Como sabemos que $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces se sigue que $x\mathcal{R}z\ \wedge\ z\mathcal{R}x$, de donde se obtiene que $x\mathcal{S}z$. □

3.8. (Ejercicio 3.8) ***Solución.*** Primero debemos comprender al conjunto $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$:

$$\boxed{\mathcal{R}\cap\mathcal{S}=\{(x,y)\in A^2\ :\ (x,y)\in\mathcal{R}\ \wedge\ (x,y)\in\mathcal{S}\}}$$

Veremos primero que la relación $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ es refleja. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de equivalencia, en particular son reflejas; luego, $(x,x)\in\mathcal{R}\ \wedge\ (x,x)\in\mathcal{S}$. Luego, $(x,x)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$.

Para ver si la relación $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ es simétrica, consideramos $(x,y)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$. Por la definición de $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$, es claro que $(x,y)\in\mathcal{R}\ \wedge\ (x,y)\in\mathcal{S}$. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de equivalencia, en particular son simétricas, de donde se sigue que $(y,x)\in\mathcal{R}\ \wedge\ (y,x)\in\mathcal{S}$. Así, se obtiene $(y,x)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$.

Para ver si la relación $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ es transitiva, consideramos $(x,y)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ e $(y,z)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$. Por la definición de $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$, es claro que $(x,y)\in\mathcal{R}\ \wedge\ (x,y)\in\mathcal{S}$ y que $(y,z)\in\mathcal{R}\ \wedge\ (y,z)\in\mathcal{S}$. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de equivalencia, en particular son transitivas, de donde se sigue que $(x,z)\in\mathcal{R}\ \wedge\ (x,z)\in\mathcal{S}$. Así, se obtiene $(x,z)\in\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$. □

Ayudantía 4

Equipotencia (Parte 1)

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

4.1. Principio del Palomar y Biyectividad

- (Palomar) Si hay m pelotas y n vasos, con $m > n$, al repartir todas las pelotas en los vasos, habrá **al menos un** vaso con más de una pelota.
- Si $A = m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $B = n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $m > n$ y $f : A \longrightarrow B$, entonces existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Por tanto, f no será inyectiva.
- Si $A = p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $B = q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $q > p$ y $f : A \longrightarrow B$, entonces existe $y_0 \in B$ tal que para todo $x \in A$ se cumple $y_0 \neq f(x)$. Por tanto, f no será sobreyectiva.
- Entonces, para $A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ y $B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la única forma de garantizar que $f : A \longrightarrow B$ sea biyectiva es $m = n$.

4.2. Relación de Equipotencia

DEFINICIÓN 4.1. Dados dos conjuntos A y B, se define la relación ***ser equipotentes*** como:

$$\boxed{A \text{ es equipotente con } B \iff A \approx B \iff \text{existe } f\colon A \to B \text{ biyectiva}}$$

4.2.1. Equipotencia es una Relación de Equivalencia

TEOREMA 4.1. *La relación $\approx$ es **refleja**; es decir, $A \approx A$*

Demostración. Para ello, basta con $f : A \longrightarrow A$ dada por $f(a) = a$ (es decir, la función identidad). Claramente ella será biyectiva (DEMOSTRAR), por lo que $A \approx A$. □

TEOREMA 4.2. *La relación $\approx$ es **simétrica**; es decir, $A \approx B \implies B \approx A$*

Demostración. Como $A \approx B$, por Definición 4.1 se sigue que existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Como f es biyectiva, en particular existe $f^{-1} : B \longrightarrow A$ y, además, es biyectiva. Luego, por Definición 4.1 se concluye que $B \approx A$. □

TEOREMA 4.3. *La relación $\approx$ es **transitiva**; es decir, $A \approx B \ \wedge \ B \approx C \implies A \approx C$*

Demostración. Como $A \approx B$, se sigue que existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Análogamente, de $B \approx C$, se sigue que existe $g : B \longrightarrow C$ biyectiva. Como la composición de funciones biyectivas es biyectiva (Ejercicio 2.9), entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es biyectiva. Luego, $A \approx C$. □

4.2.2. Equipotencia y Operaciones de Conjuntos

TEOREMA 4.4. *Si $A \approx B \ \wedge \ C \approx D \ \wedge A \cap C = \varnothing \ \wedge \ B \cap D = \varnothing$, entonces $A \cup C \approx B \cup D$*

Demostración. De las hipótesis, existe $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ biyectivas. A partir de ello, las otras dos hipótesis se pueden interpretar como $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \varnothing$ y que $\mathrm{Rec}(f) \cap \mathrm{Rec}(g) = \varnothing$.

Con ello, podemos definir la función $h : A \cup C \longrightarrow B \cup D$, $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$

Lo que resta ahora es demostrar que h es biyectiva:

- h es inyectiva, pues f y g son, respectivamente, inyectivas. Además, si $x_1 \in A \ \wedge \ x_2 \in B$, como $A \cap C = \varnothing$, sabemos que $x_1 \neq x_2$. Luego, como $B \cap D = \varnothing$, se tiene $f(x_1) \neq g(x_2)$, por lo que se cumple la inyectividad en todos los casos.
- h es sobreyectiva, pues para $y \in B \cup D$ existen dos opciones: si $y \in B$, entonces existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$ (pues f es sobreyectiva), mientras que si $y \in D$, entonces existe $x \in C$ tal que $y = g(x)$ (pues g es sobreyectiva). Luego, se obtiene que para todo $y \in B \cup D$ existe $x \in A \cup C$ tal que $y = h(x)$. Por ello, $\mathrm{Rec}(h) = B \cup D$.

Por lo tanto, h es biyectiva y se concluye que $A \cup C \approx B \cup D$ □

TEOREMA 4.5. *Si $A \approx B \ \wedge \ C \approx D$, entonces $A \times C \approx B \times D$*

Demostración. De las hipótesis, existe $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ biyectivas. Luego, si formamos pares ordenados en $A \times C$, es posible formar pares ordenados correspondientes en $B \times D$, mediante la función $h : A \times C \longrightarrow B \times D \ , \ h(x, z) = (f(x), g(z))$

Lo que resta ahora es demostrar que h es biyectiva:

- h es inyectiva, pues si $h(x_1, z_1) = h(x_2, z_2)$, por definición de par ordenado se obtiene $f(x_1) = f(x_2) \ \wedge g(z_1) = g(z_2)$. Como f y g son inyectivas, se obtiene $x_1 = x_2 \ \wedge z_1 = z_2$. Nuevamente, por definición de par ordenado, se concluye $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$.
- h es sobreyectiva, pues todo elemento $y \in B$ tiene preimagen (pues f es sobreyectiva) y todo elemento $w \in D$ tiene preimagen (pues g es sobreyectiva). Luego, todo elemento $(y, w) \in B \times D$ tendrá preimagen $(x, z) \in A \times C$, de donde se obtiene $\mathrm{Rec}(h) = B \times D$.

Por lo tanto, h es biyectiva y se concluye que $A \times C \approx B \times D$ □

TEOREMA 4.6. $A \times B \approx B \times A$

Demostración. En este caso, no contamos con hipótesis previas. Solamente podemos establecer una función que tome **TODO** elemento de $A \times B$ y lo relacione con **TODO** elemento de $B \times A$, tal que esa función sea biyectiva. Tal función será $f : A \times B \longrightarrow B \times A \ , \ f(x, y) = (y, x)$

Lo que resta ahora es demostrar que f es biyectiva:

- f es inyectiva, pues si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, entonces $(y_1, x_1) = (y_2, x_2)$. Por definición de par ordenado se obtiene $y_1 = y_2 \ \wedge x_1 = x_2$. Esto nos permite, por definición de par ordenado, construir los pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2), que también son iguales.
- f es sobreyectiva, pues todo par $(y, x) \in B \times A$ tiene su correspondiente par $(x, y) \in A \times B$ tal que $f(x, y) = (y, x)$. Con ello, $\mathrm{Rec}(f) = B \times A$.

Por lo tanto, f es biyectiva y se concluye que $A \times B \approx B \times A$. □

TEOREMA 4.7. $A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C$

Demostración. En este caso, tampoco contamos con hipótesis previas. Solamente podemos establecer una función que tome **TODO** elemento de $A \times (B \times C)$ y lo relacione con **TODO** elemento de $(A \times B) \times C$, tal que esa función sea biyectiva. Tal función será:

$$g : A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C \ , \ g(x; (y, z)) = ((x, y); z)$$

Lo que resta ahora es demostrar que g es biyectiva:

- g es inyectiva, pues si $g(x_1; (y_1, z_1)) = g(x_2; (y_2, z_2))$, entonces $((x_1, y_1); z_1) = ((x_2, y_2); z_2)$. Luego, por definición de par ordenado se obtiene $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \ \wedge z_1 = z_2$. Nuevamente por definición de par ordenado, se obtiene $(x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2) \ \wedge \ z_1 = z_2$. Por asociatividad de $\wedge$ y por definición de par ordenado, se sigue $x_1 = x_2 \ \wedge (y_1, z_1) = (y_2, z_2)$, de donde se concluye $(x_1; (y_1, z_1)) = (x_2; (y_2, z_2))$.
- g es sobreyectiva, pues todo par $((x, y); z) \in (A \times B) \times C$ tiene su correspondiente par $(x; (y, z)) \in A \times (B \times C)$ tal que $g(x; (y, z)) = ((x, y); z)$. Con ello, $\mathrm{Rec}(g) = (A \times B) \times C$.

Por lo tanto, g es biyectiva y se concluye que $A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C$. □

TEOREMA 4.8. $A \times \{x\} \approx A$ *y* $\{x\} \times A \approx A$ *(o también* $A \times \{x\} \approx \{x\} \times A$ *).*

Demostración. En este caso, tampoco contamos con hipótesis previas. Solamente podemos establecer una función que tome **TODO** elemento de $A \times \{x\}$ y lo relacione con **TODO** elemento de A, tal que esa función sea biyectiva. Tal función será $f : A \times \{x\} \longrightarrow A \ , \ f(a, x) = a$

Lo que resta ahora es demostrar que f es biyectiva:

- g es inyectiva, pues si $f(a_1, x) = f(a_2, x)$, entonces $a_1 = a_2$. Luego, si añadimos la Tautología $x = x$, es posible construir los pares (a_1, x) y (a_2, x), que son iguales.
- g es sobreyectiva, pues todo elemento $a \in A$ tiene su correspondiente par $(a, x) \in A \times \{x\}$ tal que $f(a, x) = a$. Con ello, $\text{Rec}(f) = A$.

Por lo tanto, f es biyectiva y se concluye que $A \times \{x\} \approx A$ $\square$.

La demostración de $\{x\} \times A \approx A$ es completamente análoga, mientras que la demostración de $A \times \{x\} \approx \{x\} \times A$ se puede hacer de forma análoga, o también por transitividad (Teorema 4.3) de las propiedades ya demostradas. $\square$

TEOREMA 4.9. *Existen conjuntos C, D tales que $A \approx C \ \wedge \ B \approx D \ \wedge \ C \cap D = \varnothing$.*

Demostración. Considerando la demostración del Teorema anterior y el Ejercicio 4.1, podemos utilizar los conjuntos $C = A \times \{\varnothing\}$ y $D = B \times \{\{\varnothing\}\}$. Buscamos garantizar que $C \cap D = \varnothing$, por lo que conjuntos que **involucren** al vacío siempre son buenas opciones.

Vemos que $\{\varnothing\}$ y $\{\{\varnothing\}\}$ son conjuntos que contienen un solo elemento. Luego, por el Teorema anterior, se obtiene directamente que $A \approx C$ y que $B \approx D$.

Lo difícil en este caso es demostrar que $C \cap D = \varnothing$. Por Contradicción, supondremos que $C \cap D \neq \varnothing$. Esto implica que existe (x, y) tal que $(x, y) \in A \times \{\varnothing\}$ y que $(x, y) \in B \times \{\{\varnothing\}\}$. Por definición de par ordenado, se sigue que:

$$(x \in A \ \wedge y \in \{\varnothing\}) \ \wedge (x \in B \ \wedge y \in \{\{\varnothing\}\}) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in A \cap B) \ \wedge \ (y \in \{\varnothing\} \ \wedge y \in \{\{\varnothing\}\})$$

Como no sabemos nada sobre $A \cap B$, no podemos estar seguros del valor de verdad $x \in A \cap B$. En tanto, para y debe ocurrir que $y = \varnothing$ y que $y = \{\varnothing\}$. Sin embargo, por el Ejercicio 4.1 ya vimos que esto no puede ocurrir. Por lo tanto, $C \cap D = \varnothing$. $\square$

4.2.3. Ejercicios Propuestos

4.1. (Solución 4.1) **Demostrar que** $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

4.2. (Solución 4.2) **Sean** A, B, C **conjuntos. Demostrar que** $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

4.3. (Solución 4.3) **Si** A, B, C **conjuntos y** $B \cap C = \varnothing$**, entonces** $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$.

4.4. (Solución 4.4) **Si** A, B **conjuntos y** $A = B$**, entonces** $A \approx B$.

4.5. (Solución 4.5) **Si** f **es una función, demostrar que** $\text{Dom}(f) \approx f$**. Visto de otro modo, si** $f : A \to B$**, demostrar que** $A \approx f$

4.6. (Solución 4.6) **Demostrar que** $A \approx B \iff A \times C \approx B \times C$.

4.2.4. Una solución para los Ejercicios

4.1. (Ejercicio 4.1) ***Solución.*** Por el **Axioma ZF3**, sabemos que existe un conjunto sin elementos, denotado habitualmente por $\varnothing$. Luego, por el **Axioma ZF4**, podemos formar el par $\{\varnothing, \varnothing\} = \{\varnothing\}$. Sabemos además que $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$. Ahora, resta demostrar que $\{\varnothing\} \nsubseteq \varnothing$.

Por Contradicción, supondremos que $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$. Si lo traducimos a la definición lógica, se obtiene $(x \in \{\varnothing\} \implies x \in \varnothing)$. Como $\varnothing$ es el único elemento de $\{\varnothing\}$, entonces $\varnothing \in \{\varnothing\}$ (es verdadero) y tendría que ser cierto que $\varnothing \in \varnothing$. ***Esto es una Contradicción, pues*** $\varnothing$ ***no tiene elementos***. Por lo tanto, $\{\varnothing\} \nsubseteq \varnothing$, de donde $\{\varnothing\} \neq \varnothing$ $\square$

4.2. (Ejercicio 4.2) ***Solución.*** La igualdad de conjuntos está dada por el **Axioma ZF1**:
$A = B \iff (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Recurriendo a la definición de par ordenado, se tiene:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cup C) &\Longleftrightarrow x \in A \ \wedge \ y \in B \cup C \\
&\Longleftrightarrow x \in A \ \wedge \ (y \in B \ \vee \ y \in C) \\
&\Longleftrightarrow [x \in A \ \wedge \ y \in B] \ \vee \ [x \in A \ \wedge \ y \in C] \\
&\Longleftrightarrow [(x, y) \in A \times B] \ \vee \ [(x, y) \in A \times C] \\
&\Longleftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

$\square$

4.3. (Ejercicio 4.3) ***Solución.*** Por Contradicción, si suponemos que $(A \times B) \cap (A \times C) \neq \varnothing$, entonces existe (al menos un) $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Por definición de intersección y de par ordenado, esto implica que $x \in A \ \wedge \ y \in B \ \wedge \ y \in C$. Así, $y \in B \cap C$, por lo que $B \cap C \neq \varnothing$ (lo que ya sabemos es falso). Así, hemos demostrado que $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$. □

4.4. (Ejercicio 4.4) ***Solución.*** Hay varias formas de demostrar esto. La más accesible es decir que, dado que $A = B$, entonces demostrar que $A \approx B$ es equivalente a demostrar que $A \approx A$. Esto último es verdadero de acuerdo con el Teorema 4.1.

Otra forma para demostrar que $A \approx B$ es recurriendo a la Definición 4.1; es decir, demostrando que existe una biyección entre A y B. Como $A = B$, basta con relacionar cada elemento de A con su correspondiente elemento de B mediante la función identidad $f : A \longrightarrow B \ , \ f(a) = a$. Esta función es trivialmente biyectiva, pues por $A = B$ se sigue que $a \in B$. □

4.5. (Ejercicio 4.5) ***Solución.*** Para este problema, consideraremos a $f : A \longrightarrow B$ como un conjunto de pares ordenados $(a, b) \in A \times B$ tales que $b = f(a)$.

En este caso, definiremos una función $g : A \longrightarrow f$ tal que $g(a) = [a, f(a)]$, y demostraremos que es biyectiva. Si consideramos la tautología $p \wedge q \ \Rightarrow p$, se tiene:

$$\boxed{g(a_1) = g(a_2)} \implies [a_1, f(a_1)] = [a_2, f(a_2)] \implies a_1 = a_2 \ \wedge \ f(a_1) = f(a_2) \implies \boxed{a_1 = a_2}$$

y obtenemos que g es inyectiva. Para demostrar que g es sobreyectiva, consideramos $[a, f(a)] \in f$ e inmediatamente podemos ver que la primera coordenada es tal que $a \in A$. Con ello, se demuestra de inmediato que $\exists a \in A \ : \ [a, f(a)] = g(a)$. Es decir, $[a, f(a)] \in \mathrm{Rec}(g)$, de donde $f \subseteq \mathrm{Rec}(g)$.

Como por Definición de Recorrido se cumple $\mathrm{Rec}(g) \subseteq f$, se concluye que $f = \mathrm{Rec}(g)$, por lo que g es sobreyectiva. Así, g es biyectiva y $A \approx f$. □

4.6. (Ejercicio 4.6) ***Solución.*** ($\Longrightarrow$) Como $A \approx B$ y $C \approx C$ (Teorema 4.1), por Teorema 4.5 se obtiene $A \times C \approx B \times C$.

($\Longleftarrow$) Suponemos que $A \times C \approx B \times C$. Esto implica, por Definición 4.1, que existe $f : A \times C \longrightarrow B \times C$ biyectiva. Esta función bien podría corresponder a $f[(a, c)] = (b, c)$. Si definimos $g : A \longrightarrow B$ tal que $g(a) = b$, podemos redefinir la regla de la función f como $f[(a, c)] = [g(a), c]$.

Pues bien, si $g(a_1) = g(a_2)$, entonces $[g(a_1), c] = [g(a_2), c]$, de donde $f[(a_1, c)] = f[(a_2, c)]$. Como f es biyectiva, entonces $(a_1, c) = (a_2, c)$, de donde $a_1 = a_2$. Por lo tanto, g es inyectiva.

Ahora, sea $b \in B$. Considerando $c \in C$, se obtiene $(b, c) \in B \times C$. Como f es biyectiva, entonces existe $(a, c) \in A \times C$ tal que $f[(a, c)] = (b, c)$. Esto implica que existe $a \in A$ tal que $[g(a), c] = (b, c)$, de donde se sigue que existe $a \in A$ tal que $g(a) = b$. Por lo tanto, g es sobreyectiva.

Finalmente, se concluye que g es biyectiva, por lo que $A \approx B$. □

Ayudantía 5

Equipotencia (Parte 2)

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

5.1. Conjuntos de Funciones

DEFINICIÓN 5.2. Se define el conjunto B^A como aquel que contiene a todas las funciones cuyo dominio es A y cuyo **codominio** es B:

$$\boxed{B^A = \{f \mid f : A \longrightarrow B\}}$$

5.1.1. Ejercicios Propuestos

5.1. (Solución 5.1) **Demostrar que** $A^{\varnothing} = \{\varnothing\}$.

5.2. (Solución 5.2) **Si** $A \neq \varnothing$**, demostrar que** $\varnothing^A = \varnothing$.

5.3. (Solución 5.3) **Demostrar que** $B^A = \varnothing \iff B = \varnothing \ \wedge \ A \neq \varnothing$.

5.4. (Solución 5.4) **Demostrar que** $A^{\{x\}} = \{\ \{(x, y)\}, y \in A\}$.

5.5. (Solución 5.5) **Demostrar que si** $C \neq \varnothing$ **y** $A \subseteq B$**, entonces** $A^C \subseteq B^C$.

5.6. (Solución 5.6) **Demostrar que si** $A \subseteq C$**, entonces NO SE CUMPLE que** $B^A \subseteq B^C$.

5.1.2. Una solución para los Ejercicios

5.1. (Ejercicio 5.1) ***Solución.*** Consideramos por **Definición A3** que $\boxed{A^{\varnothing} = \{f | f : \varnothing \longrightarrow A\}}$. Con ello, vemos que:

$$f \in A^{\varnothing} \iff f : \varnothing \longrightarrow A \iff f = \{(x, y) | x \in \varnothing \ \wedge \ y \in A\} \subseteq \varnothing \times A$$

Sin embargo, sabemos que $\varnothing \times A = \varnothing$ (DEMOSTRAR). De allí se sigue que $\boxed{f = \varnothing}$. Así, se concluye que $\boxed{A^{\varnothing} = \{\varnothing\}}$.

En particular, esto demuestra automáticamente que $\varnothing^{\varnothing} = \{\varnothing\} \neq \varnothing$ □

5.2. (Ejercicio 5.2) ***Solución.*** Consideramos por Definición 5.2 que $\boxed{\varnothing^A = \{f | f : A \longrightarrow \varnothing\}}$. Por Contradicción, supondremos que $\varnothing^A \neq \varnothing$; es decir, existe $f \in \varnothing^A$. Por Definición de función, $(\forall x \in A)(\exists! y \in \varnothing) : [(x, y) \in f]$.

Sin embargo, no existe $y \in \varnothing$ (por Definición de $\varnothing$). Por lo tanto, no existe $f : A \longrightarrow \varnothing$ y se concluye que $\boxed{\varnothing^A = \varnothing}$ □

5.3. (Ejercicio 5.3) ***Solución.*** ($\Longleftarrow$) Si $B = \varnothing \ \wedge A \neq \varnothing$, entonces $B^A = \varnothing^A$ y, por Ejercicio 5.2, se concluye que $B^A = \varnothing$.

($\Longrightarrow$) Si $B^A = \varnothing$ y $A = \varnothing$, entonces $B^A = B^{\varnothing}$ y, por Ejercicio 5.1 obtenemos $B^A = \{\varnothing\} \neq \varnothing$. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir. Esto demuestra inmediatamente que $\boxed{A \neq \varnothing}$.

Por Contradicción, supondremos que $B^A = \varnothing$, $A \neq \varnothing$ y que $\boxed{B \neq \varnothing}$. Esto significa que existen $a \in A \ \wedge \ b \in B$. Con ellos, siempre será posible formar el par ordenado $(a, b) \in A \times B$, por lo que podemos definir (al menos) una función $f = \{(a, b)\}$. Así, llegamos a que $\boxed{B^A \neq \varnothing}$, lo que contradice nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, solo puede ocurrir que $\boxed{B = \varnothing}$ □

5.4. (Ejercicio 5.4) ***Solución.*** Consideramos por Definición 5.2 que $\boxed{A^{\{x\}} = \{f | f : \{x\} \longrightarrow A\}}$. Aplicando la definición de función, se tiene: $(\forall x \in \{x\})(\exists! y \in A) : [(x, y) \in f]$. Sin embargo, es evidente que $\{x\}$ contiene un solo elemento, por lo que f podrá contener un único par ordenado. Pero el segundo elemento del par ordenado puede ser **cualquier elemento de** A. Así, podemos decir que $f = \{(x, y)\}, y \in A$. Con ello, se concluye que $\boxed{A^{\{x\}} = \{f\} = \{\ \{(x, y)\}, y \in A\}}$. □

5.5. (Ejercicio 5.5) ***Solución.*** Las hipótesis son $C \neq \varnothing$ y $A \subseteq B$. Demostraremos que $A^C \subseteq B^C$.

Sea $f \in A^C$. Esto implica que $f : C \longrightarrow A$ o bien que $f = \{(c, a) \mid c \in C \wedge a \in A \wedge a = f(c)\}$.

Como $A \subseteq B$, es inmediato que $f = \{(c, a) \mid c \in C \wedge a \in B \wedge a = f(c)\}$. Así, hemos obtenido que $f : C \longrightarrow B$, de donde $f \in B^C$. Por lo tanto, se concluye que $A^C \subseteq B^C$. □

5.6. (Ejercicio 5.6) ***Solución.*** Si $f \in B^A$, entonces $f : A \longrightarrow B$. Si $g \in B^C$, entonces $g : C \longrightarrow B$. Como $A \subseteq C$ y considerando la Definición 2.1, podemos decir que f es una restricción de g a A; es decir, $f = g|_A$.

Sin embargo, no es cierto que $f = g$. Para que esto ocurriera, ambas funciones deberían tener el mismo dominio, el mismo codominio y la misma regla de asignación. Vemos que el codominio y la regla de asignación son iguales, pero no necesariamente el dominio.

Lo más que podríamos conseguir es demostrar que g está formada por dos partes o tramos (es decir, es la unión de otras dos funciones). Tales partes serían $g|_A = f$ y $g|_{C-A}$. Con ello, se demuestra que $f \subseteq g$ (vistas como conjunto de pares ordenados).

Así, la propiedad enunciada es falsa desde lo intuitivo. Sin embargo, hay que demostrar esta falsedad con un contraejemplo. Consideramos $A = B = \varnothing$ y $C \neq \varnothing$ (cumple con $\varnothing \subseteq C$. De allí, $\boxed{B^A = \varnothing^{\varnothing} = \{\varnothing\}}$ y $\boxed{B^C = \varnothing^C = \varnothing}$. Por Ejercicio 4.1 vimos que $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ (y no al revés), de donde se concluye que $B^C \subseteq B^A$ (y no al revés). □

5.2. Relación de Equipotencia (continuación)

5.2.1. Equipotencia y Conjuntos de Funciones

TEOREMA 5.10. *Si* $A \approx B \ \wedge \ C \approx D$*, entonces* $A^C \approx B^D$.

Demostración. De las hipótesis, existen $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ biyectivas.

Ahora, si $h \in A^C$ (es decir, $h : C \longrightarrow A$), entonces podemos hacer $f \circ h : C \longrightarrow B$. Luego, como g es biyectiva, entonces existe $g^{-1} : D \longrightarrow C$. Así, podemos hacer $f \circ h \circ g^{-1} : D \longrightarrow B$.

Notar que en el razonamiento anterior, las funciones f y g son únicas y fijas (provienen de la hipótesis), mientras que la función h es cualquiera de A^C.

Con ello, establecemos una ***función de funciones***: $F : A^C \longrightarrow B^D$, $F(h) = f \circ h \circ g^{-1}$. Lo que resta es demostrar que es biyectiva:

- Para la inyectividad de F se tiene:

$$F(h_1) = F(h_2) \implies f \circ h_1 \circ g^{-1} = f \circ h_2 \circ g^{-1} \overset{f^{-1}\circ}{\implies} h_1 \circ g = h_2 \circ g \overset{\circ g}{\implies} h_1 = h_2$$

- Dado $h_F \in B^D$, se tiene:

$$h_F = F(h) \implies h_F = f \circ h \circ g^{-1}$$
$$(f^{-1}\circ) \implies f^{-1} \circ h_F = h \circ g^{-1}$$
$$(\circ g) \implies f^{-1} \circ h_F \circ g = h$$

Es decir, para todo $h_F \in B^D$ existe $h \in A^C$ tal que $h_F = F(h)$. Luego, $\mathrm{Rec}(F) = B^D$ y la función F es sobreyectiva. Por lo tanto, F es biyectiva y se concluye que $A^C \approx B^D$.

□

TEOREMA 5.11. *Si $B \cap C = \varnothing$, entonces $A^{B\cup C} \approx A^B \times A^C$.*

Demostración. Lo primero que debiéramos hacer en este caso es interpretar a los elementos de cada uno de los conjuntos:

- $f \in A^{B\cup C}$ significa que $f : B \cup C \longrightarrow A$, cuya regla de asignación no definiremos todavía.
- $g \in A^B \times A^C$ significa que g debe ser un par ordenado de dos funciones $(f|_B, f|_C)$, donde $f|_B : B \longrightarrow A$ y $f|_C : C \longrightarrow A$. Lo anterior corresponde a restringir el dominio de f a los conjuntos B y C, respectivamente, dado que $B \cap C = \varnothing$.
- Como $B \cap C = \varnothing$, podemos construir la regla de asignación de la función f considerando $x \in B \cup C$:

$$f(x) = \begin{cases} f|_B(x) & \text{si } x \in B \\ f|_C(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Luego, la función candidata a biyección debe ser, nuevamente, una ***función de funciones***: $F : A^{B\cup C} \longrightarrow A^B \times A^C$. Lo que queda es definir qué hace la función (relacionar alguna f con alguna g), para lo que aprovechamos la interpretación que hicimos: $F(f) = (f|_B, f|_C)$.

Ahora, nos resta verificar que F es biyectiva:

- Para la inyectividad de F se tiene:

$$F(f) = F(h) \implies (f|_B, f|_C) = (h|_B, h|_C) \overset{\text{Def. de par}}{\implies} f|_B = h|_B \ \wedge \ f|_C = h|_C \overset{\text{Unión}}{\implies} f = h$$

- Dada $g_F \in A^B \times A^C$, debemos determinar (encontrar, construir) una función $f \in A^{B\cup C}$ tal que:

$$g_F = F(f) \implies g_F = (f|_B, f|_C)$$

Aquí es donde cobra una gran importancia la función f que definimos antes, pues a partir de g_F, siempre será posible definir a tal f. Es decir, para todo $g_F \in A^B \times A^C$ existe $f \in A^{B\cup C}$ tal que $g_F = F(f)$. Luego, $\mathrm{Rec}(F) = A^B \times A^C$ y la función F es sobreyectiva.

Por lo tanto, F es biyectiva y se concluye que $A^{B\cup C} \approx A^B \times A^C$. □

TEOREMA 5.12. $(A \times B)^C \approx A^C \times B^C$.

Demostración. Nuevamente, interpretamos a los elementos de cada uno de estos conjuntos:

- $g \in A^C \times B^C$ significa que g debe ser un par ordenado de dos funciones (f_1, f_2), donde $f_1 : C \longrightarrow A$ y $f_2 : C \longrightarrow B$. En este caso, f_1 y f_2 solamente tienen en común el dominio C. Podríamos entender a las funciones f_1 y f_2 como ***proyecciones de*** C ***en*** A ***y*** B.
- $f \in (A \times B)^C$ significa que $f : C \longrightarrow A \times B$. Podemos construir esta ***función preliminar*** considerando $x \in C$, con $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Luego, la función candidata a biyección debe ser, nuevamente, una ***función de funciones***: $F : (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$. Lo que queda es definir qué hace la función (relacionar alguna f con alguna g), para lo que aprovecharemos la interpretación que acabamos de hacer: $F(f) = (f_1, f_2)$.

Nuevamente, debemos verificar que esta función F es biyectiva:

- Para la inyectividad de F se tiene: $F(f) = F(h) \implies (f_1, f_2) = (h_1, h_2) \overset{f=(f_1,f_2)}{\implies} f = h$
- Dada $g_F \in A^C \times B^C$, debemos determinar (encontrar, construir) una función $f \in (A \times B)^C$ tal que $g_F = F(f) \implies g_F = (f_1, f_2) = f$. Aquí es donde cobra una gran importancia la función f que definimos antes, pues a partir de g_F, siempre será posible definir a tal f, pues son la misma función. Es decir, para todo $g_F \in A^B \times A^C$ existe $f \in (A \times B)^C$ tal que $g_F = F(f)$. Luego, $\mathrm{Rec}(F) = A^B \times A^C$ y la función F es sobreyectiva.

Por lo tanto, F es biyectiva y se concluye que $(A \times B) \cup C \approx A^B \times A^C$. □

TEOREMA 5.13. $(A^B)^C \approx A^{B\times C}$.

Demostración. Lo primero que debiéramos hacer en este caso es interpretar a los elementos de cada uno de los conjuntos:

- $f \in A^{B\times C}$ significa que $f : B \times C \longrightarrow A$. Es decir, la preimagen es un par ordenado (b, c) y la imagen es un elemento de A; es decir, $a = f(b, c)$.
- $g \in (A^B)^C$ significa que $g : C \longrightarrow A^B$. Es decir, la preimagen es un elemento de C y la imagen es una función $h : B \longrightarrow A$. En ese sentido, podríamos pensar que esta función en realidad es una especie de ***composición de funciones***.

Luego, la función candidata a biyección debe ser, nuevamente, una ***función de funciones***: $F : A^{B\times C} \longrightarrow A^B \times A^C$. Lo que queda es definir qué hace la función (relacionar alguna f con alguna g), para lo que haremos una interpretación secuencial:

$$\begin{aligned} g = F(f) : C \longrightarrow A^B &\implies h = g(c) = F(f)(c) : B \longrightarrow A \\ &\implies a = h(b) = g(c)(b) = \boxed{[F(f)(c)]\ (b) = f(b, c)} \end{aligned}$$

Ahora, nos resta verificar que F es biyectiva, para lo cual debemos considerar que la preimagen será un elemento f:

- Para la inyectividad de F se tiene:

$$\begin{aligned} F(f_1) = F(f_2) &\implies \forall b \in B\ \forall c \in C\ (\ [F(f_1)(c)]\ (b) = [F(f_2)(c)]\ (b)\ ) \\ \text{Def. de } F &\implies \forall (b, c) \in\ B \times C\ (\ f_1(b, c) = f_2(b, c)\ ) \\ &\implies f_1 = f_2 \end{aligned}$$

- Si $g \in (A^B)^C$, debemos determinar (encontrar, construir) una función $f \in A^{B\times C}$ tal que $g = F(f)$. Aquí es donde cobra una gran importancia el análisis que hicimos antes, pues a partir de g, siempre será posible definir a tal f:
  - Como $g \in (A^B)^C$, entonces $g : C \longrightarrow A^B$.
  - Dado $c \in C$, la imagen de c bajo g será $g(c) \in A^B$; es decir, $g(c) : B \longrightarrow A$.
  - Dado $b \in B$, la imagen de b bajo $g(c)$ será $g(c)(b) \in A$; es decir, $g(c)(b) = a$.
  - Por otra parte, como $f \in A^{B\times C}$, entonces $f : B \times C \longrightarrow A$.
  - Es decir, si $(b, c) \in B \times C$, su imagen será $f(b, c) \in A$; es decir, $f(b, c) = a$.
  - Luego, por Transitividad, es evidente que $f(b, c) = g(c)(b)$.

  Es decir, para todo $g \in (A^B)^C$ existe $f \in A^{B\times C}$ tal que $g = F(f)$. Luego, $\mathrm{Rec}(F) = (A^B)^C$ y la función F es sobreyectiva.

  Por lo tanto, F es biyectiva y se concluye que $(A^B)^C \approx A^{B\times C}$. □

TEOREMA 5.14. *Si* $2 = \{\ \varnothing, \{\varnothing\}\ \}$*, entonces* $\mathcal{P}(A) \approx 2^A$.

Demostración. En esta ocasión, nuevamente analizaremos los elementos de nuestros conjuntos:

- $B \in \mathcal{P}(A)$ implica que $B \subseteq A$.
- $f \in 2^A$ significa que $f : A \longrightarrow 2$. Es decir, la imagen de los elementos de A será $\varnothing$ o bien $\{\varnothing\}$. En estos casos, se suele tratar de funciones dicotómicas; es decir, que cumplen o no con una única condición.

Si solo pensamos en la función f, debemos tomar un elemento $a \in A$ y *tomar una decisión* para decidir si $f(a) = \varnothing$ o bien $f(a) = \{\varnothing\}$. Hasta este punto, no hemos involucrado a $B \subseteq A$.

Pues bien, dado $B \in \mathcal{P}(A)$, para nuestro elemento $a \in A$ existen dos posibilidades: $a \in B$ o bien $a \notin B$. Aquí existen dos observaciones importantes:

- Si $a \notin B$, aún debe ocurrir que $a \in A$. Como $B \subseteq A$, podemos expresar este caso como $a \in A - B$.
- Todo lo dicho hasta aquí ***depende del conjunto*** $B \subseteq A$ ***que escojamos***. En otras palabras, si escogemos $B_2 \subseteq A, B_2 \neq B$, la decisión sobre los elementos de a será distinta (es decir, se dará origen a una nueva función $f_2 \neq f$).

En vista de todo lo dicho, definiremos nuestra función f ***como dependiente del conjunto B escogido***. Sin perder generalidad (SPG), la definiremos como:

$$f_B : A \longrightarrow 2 \quad , \quad f_B(a) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \in B \\ \{\varnothing\} & \text{si } a \in A - B \end{cases}$$

Sin embargo, la función candidata a biyección debe ser $g : \mathcal{P}(A) \longrightarrow 2^A$; es decir, su preimagen debe ser $B \in \mathcal{P}(A)$ y su imagen debe ser $g(B) \in 2^A$. Pero ya contamos con una función $f_B \in 2^A$ que también depende de B. Todo esto nos lleva a definir $\boxed{g(B) = f_B}$ (es decir, aquí el rol de a ya no es relevante). Ahora, nos resta demostrar que g es biyectiva:

- Si $g(B_1) = g(B_2) = \varnothing$, entonces $\forall a \in A \ (\ f_{B_1}(a) = f_{B_2}(a) = \varnothing \ )$. Al considerar la "toma de decisión" que nos llevó a definir f, se obtiene que $\forall a \in A \ (\ a \in B_1 \Leftrightarrow a \in B_2 \ )$, por lo que $B_1 = B_2$ en este caso.
- Si $g(B_1) = g(B_2) = \{\varnothing\}$, por un razonamiento análogo al anterior, se obtiene $A - B_1 = A - B_2$. Luego, se tiene:

$$\boxed{A - B_1 = A - B_2} \iff A \cap B_1^{\mathrm{C}} = A \cap B_2^{\mathrm{C}} \iff (A^{\mathrm{C}} \cup B_1)^{\mathrm{C}} = (A^{\mathrm{C}} \cup B_2)^{\mathrm{C}}$$
$$\iff \boxed{A^{\mathrm{C}} \cup B_1 = A^{\mathrm{C}} \cup B_2} \iff A \cup A^{\mathrm{C}} \cup B_1 = A \cup A^{\mathrm{C}} \cup B_2 \iff \boxed{B_1 = B_2}$$

- Sea $h \in 2^A$; es decir, $h : A \longrightarrow 2$. Como ya estudiamos arriba, siempre tendremos que clasificar a los elementos $a \in A$ de manera dicotómica, por lo que obtendremos elementos que cumplen una cierta proposición $p(a)$ y otros que no la cumplen. Si definimos $B = \{a \in A \ : \ p(a)\}$, entonces hemos determinado la preimagen de h. Luego, para toda función $h \in 2^A$, será posible determinar B tal que $h = g(B)$. Por lo tanto, g es sobreyectiva.

Por lo tanto, g es biyectiva y se concluye que $\mathcal{P}(A) \approx 2^A$. □

Ayudantía 6

Orden en Potencia

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

6.1. Relación Menor o igual en potencia

DEFINICIÓN 6.3. Dados dos conjuntos A y B, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

6.3A. A es *menor o igual en potencia* que B ($A \precsim B$)

6.3B. Existe un conjunto C tal que $A \approx C$ y $C \subseteq B$.

6.3C. Existe una función $f : A \longrightarrow C$ biyectiva, y además $C \subseteq B$.

6.3D. Existe una función $f : A \longrightarrow B$ inyectiva.

TEOREMA 6.15. $A \approx B \implies A \precsim B$

Demostración. Si en la Definición 6.3A. hacemos $C = B$, vemos que $A \approx B$ y que $B \subseteq B$. Luego, se concluye que $A \precsim B$. □

TEOREMA 6.16. $A \subseteq B \implies A \precsim B$

Demostración. Si en la Definición 6.3A. hacemos $C = A$, vemos que $A \approx A$ (Teorema 4.1) y que $A \subseteq B$. Luego, se concluye que $A \precsim B$. □

TEOREMA 6.17. $A \precsim B \ \wedge B \precsim C \implies A \precsim C$

Demostración. En este caso, nos conviene aprovechar la Definición 6.3B.:

- $A \precsim B$ si y sólo si existe $f : A \longrightarrow B_1$ biyectiva y $B_1 \subseteq B$.
- $B \precsim C$ si y sólo si existe $g : B \longrightarrow C_1$ biyectiva y $C_1 \subseteq C$.

Como $B_1 \subseteq B$ e interpretando ambos conjuntos a la luz de las funciones f y g, obtenemos que $\mathrm{Rec}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. Esto nos permite componer ambas funciones, obteniéndose la nueva función:

$$g \circ f : A \longrightarrow C_1 \quad , \quad g \circ f(a) = g[f(a)]$$

Como además f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ será biyectiva. Finalmente, como $C_1 \subseteq C$, se concluye que $A \precsim C$. □

TEOREMA 6.18. ***(Cantor-Bernstein-Schroeder)*** $A \precsim B \ \wedge \ B \precsim A \implies A \approx B$

Demostración. Dada su complejidad, la demostración de este Teorema se analizará en profundidad en la página 30. □

TEOREMA 6.19. *Si $A \lesssim B \ \wedge \ C \lesssim D$ y además $B \cap D = \varnothing$, entonces:*

19A. $A \cup C \lesssim B \cup D$.

19B. $A \times C \lesssim B \times D$.

19C. $A^C \lesssim B^D$, ***con la condición adicional*** $\sim (A = B = C = \varnothing \ \wedge \ D \neq \varnothing)$.

***Demostración*. 19A.** En este caso, nos conviene aprovechar la Definición 6.3B.:

- $A \lesssim B$ si y sólo si existe $f : A \longrightarrow B_1$ biyectiva y $B_1 \subseteq B$.
- $C \lesssim D$ si y sólo si existe $g : C \longrightarrow D_1$ biyectiva y $D_1 \subseteq D$.

Conviene recordar que estamos en la búsqueda de una función $h : A \cup C \longrightarrow B \cup D$. Eso sí, el recorrido de h será ***un subconjunto de*** $B \cup D$.

Aquí debemos detenernos a ver cómo preservar las propiedades de las funciones f y g originales, dado que nada se sabe sobre $A \cap C$:

- Si $x \in A$, bastará con definir $h(x) = f(x) \in B_1$.
- Si $x \in C$, bastará con definir $h(x) = g(x) \in D_1$.
- Si $x \in A \cap C$, vemos que $h(x) \in B_1$ y también $h(x) \in D_1$. Como $B_1 \subseteq B$ y $D_1 \subseteq D$ y además $B \cap D = \varnothing$, en particular $B_1 \cap D_1 = \varnothing$. Esto nos lleva a la conclusión de que ***para tal x, tendremos dos imágenes distintas*** (una bajo f y otra bajo g). Evidentemente, si aspiramos a que h sea función, ***esto no puede ocurrir***.

El último problema se soluciona ***escogiendo a cuál de los dos valores irá la función***. Es decir, para $x \in A \cap C$ podemos definir que $h(x) = f(x)$ o bien $h(x) = g(x)$.

En consecuencia, de acuerdo con la Definición 2.1 y sin perder generalidad, escogeremos la segunda opción. Por ello, consideraremos una restricción de g a $C - A$:

$$g|_{C-A} : C - A \longrightarrow D_1 \quad , \quad g|_{C-A}(x) = g(x)$$

Por el Ejercicio 2.11, esta restricción será inyectiva pero no biyectiva. Entonces, y de acuerdo con la Definición 2.2, volvemos a considerar una restricción de g a su recorrido:

$$\widehat{g|_{C-A}} : C - A \longrightarrow \mathrm{Rec}(g|_{C-A}) \quad , \quad \widehat{g|_{C-A}}(x) = g(x)$$

Si llamamos $D_2 = \mathrm{Rec}(g|_{C-A})$, es evidente que $D_2 \subseteq D_1$. Además, por el Ejercicio 2.12, esta última restricción será biyectiva.

Con todo solucionado, ahora definiremos la función h como sigue:

$$h : A \cup C \longrightarrow B_1 \cup D_2 \quad , \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \widehat{g|_{C-A}}(x) = g(x) & \text{si } x \in C - A \end{cases}$$

Luego, solo nos resta demostrar que h es biyectiva:

- Si $x \in A$, entonces $h(x) = f(x)$ y f es biyectiva, por lo que en particular es inyectiva.
- Si $x \in C - A$, entonces $h(x) = \widehat{g|_{C-A}}(x)$ y $\widehat{g|_{C-A}}$ es biyectiva, por lo que en particular es inyectiva.
- Como A y $C - A$ son disjuntos (algo muy rápido de demostrar), entonces al tomar $x_1 \in A$ y $x_2 \in C - A$ se obtiene que $x_1 \neq x_2$. Como además ya sabemos que $B_1 \cap D_1 = \varnothing$ y que $D_2 \subseteq D_1$, entonces es cierto que $B_1 \cap D_2 = \varnothing$. Esto garantiza que $f(x_1) \neq f(x_2)$, por lo que en este caso, la función también es inyectiva.

Por lo tanto, h ***es inyectiva*** en todos los casos posibles.

Ahora, sea $y \in B_1 \cup D_2$. Recordando que $B_1 \cap D_2 = \varnothing$, solo existen dos opciones:

- Si $y \in B_1$, como f es biyectiva, entonces existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Luego, $y = h(x)$.
- Si $y \in D_2$, como $\widehat{g|_{C-A}}$ es biyectiva, entonces existe $x \in C - A$ tal que $y = \widehat{g|_{C-A}}(x)$. Luego, $y = h(x)$.

Es decir, para todo $y \in B_1 \cup D_2$ existe $x \in A \cup C$ tal que $y = h(x)$. Con ello, $B_1 \cup D_2 \subseteq \mathrm{Im}(h)$. Como por definición se sabe que $\mathrm{Im}(h) \subseteq B_1 \cup D_2$, entonces $B_1 \cup D_2 = \mathrm{Im}(h)$.

Por lo tanto, h ***es sobreyectiva***. Es decir, h es biyectiva y se obtiene $A \cup C \approx B_1 \cup D_2$.

Por último, del Ejercicio 6.1 se obtiene que $B_1 \cup D_2 \subseteq B \cup D$. Así, se concluye que $\boxed{A \cup C \lesssim B \cup D}$ □

Demostración. **19B.** En este caso, nos conviene aprovechar la Definición 6.3A.:

- $A \lesssim B$ si y sólo si $A \approx B_1$ y $B_1 \subseteq B$.
- $C \lesssim D$ si y sólo si $C \approx D_1$ y $D_1 \subseteq D$.

Como $A \approx B_1$ y $C \approx D_1$, por Teorema 4.5 se sigue de inmediato que $A \times C \approx B_1 \times D_1$. Considerando que del Ejercicio 6.2 se obtiene que $B_1 \times D_1 \subseteq B \times D$, por Definición 6.3A. se concluye que $\boxed{A \times C \lesssim B \times D}$. □

Demostración. **19C.** En este caso, nos conviene aprovechar la Definición 6.3B.:

- $A \lesssim B$ si y sólo si $A \approx B_1$ y $B_1 \subseteq B$.
- $C \lesssim D$ si y sólo si $C \approx D_1$ y $D_1 \subseteq D$.

Como $A \approx B_1$ y $C \approx D_1$, por Teorema 5.10 se sigue de inmediato que $A^C \approx B_1^{D_1}$. Además, como $B_1 \subseteq B$, por Ejercicio 5.5 se sigue que $B_1^{D_1} \subseteq B^{D_1}$. Hasta aquí, demostramos que $\boxed{A^C \lesssim B^{D_1}}$.

- Si $D_1 = D$, entonces $B^{D_1} = B^D$. Por Ejercicio 4.3, se sigue que $B^{D_1} \approx B^D$, mientras que por Teorema 6.15 se obtiene $B^{D_1} \lesssim B^D$. Como ya sabemos que $A^C \lesssim B^{D_1}$, por Teorema 6.17 se concluye $\boxed{A^C \lesssim B^D}$.
- Si $D_1 \subseteq D, D_1 \neq D$, entonces $D - D_1 \neq \varnothing$, por lo que existe $x \in D - D_1$. Si consideramos que $D = D_1 \cup (D - D_1)$, entonces $B^D = B^{D_1 \cup (D-D_1)}$. Como además se cumple $D_1 \cap (D - D_1) = \varnothing$, por Teorema 5.11, se cumple que $B^{D_1} \times B^{D-D_1} \approx B^D$. Luego, por Teorema 6.15 se obtiene $\boxed{B^{D_1} \times B^{D-D_1} \lesssim B^D}$. Además, por Ejercicio 6.4 se obtiene $\boxed{B^{D_1} \lesssim B^{D_1} \times B^{D-D_1}}$. Entonces, como $A^C \lesssim B^{D_1}$ y $B^{D_1} \lesssim B^{D_1} \times B^{D-D_1}$, por Teorema 6.17 se obtiene$A^C \lesssim B_1^D \times B^{D-D_1}$. Como además $B^{D_1} \times B^{D-D_1} \lesssim B^D$, nuevamente por Teorema 6.17 se concluye que $\boxed{A^C \lesssim B^D}$.

Así, hemos demostrado que en (casi) todos los casos se cumple $\boxed{A^C \lesssim B^D}$. Con respecto al caso crítico en que $A = B = C = \varnothing$ y $D \neq \varnothing$, vemos que $A^C = \varnothing^{\varnothing} = \{\varnothing\}$ y que $B^D = \varnothing^D = \varnothing$.

Como $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$, por Teorema 6.16 es claro que $B^D \lesssim A^C$. Ahora, por Contradicción, supongamos que $A^C \lesssim B^D$; es decir, que $\{\varnothing\} \lesssim \varnothing$. Por Definición 6.3A., esto implicaría que $\{\varnothing\} \approx F$ y $F \subseteq \varnothing$. La única forma de que esto fuera cierto es que $F = \varnothing$. Con ello, se tendría que $\{\varnothing\} \approx \varnothing$. Por Definición 4.1, existiría $f \in \varnothing^{\{\varnothing\}}$ y $\varnothing^{\{\varnothing\}} = \varnothing$. Es decir, no existe tal f y el razonamiento anterior se hace contradictorio. Así, **no ocurre que** $A^C \lesssim B^D$ **en este caso crítico**. □

TEOREMA 6.20. $A \lesssim A \cup B$

Demostración. Si en la Definición 6.3 hacemos $C = A$, vemos que $A \approx A$ y que $A \subseteq A \cup B$. Luego, se concluye que $A \lesssim A \cup B$. □

6.2. Relación Menor en potencia

DEFINICIÓN 6.4. Dados dos conjuntos A y B, diremos que A es *menor en potencia* que B:

$$\boxed{A \prec B \iff A \lesssim B \wedge \sim (B \lesssim A)}$$

TEOREMA 6.21. *Para la relación $\prec$ se cumple:*

21A. $\sim (A \prec A)$

21B. $A \prec B \implies \sim (B \prec A)$

21C. $A \prec B \wedge B \prec C \implies A \prec C$

Demostración. **21A.** Suponemos por Contradicción que $A \prec A$. Por Definición 6.4, se obtendría que $(A \precsim A) \wedge \ \sim (A \precsim A)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no puede ocurrir que $A \prec A$. □

Demostración. **21B.** La hipótesis se traduce en $A \precsim B \wedge \ \sim (B \precsim A)$. Por Contradicción, si suponemos que $B \prec A$, por Definición 6.4 debería ser cierto que $(B \precsim A)$, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto, $A \prec B \implies \sim (B \prec A)$. □

Demostración. **21C.** De las hipótesis se obtiene:

- $A \prec B \iff A \precsim B \wedge \ \sim (B \precsim A)$
- $B \prec C \iff B \precsim C \wedge \ \sim (C \precsim B)$

Por la Tautología lógica $\boxed{p \wedge q \ \Rightarrow p}$ y por el Teorema 6.17, es cierto que:

$$A \prec B \ \wedge \ B \prec C \implies A \precsim B \ \wedge \ B \precsim C \implies \boxed{A \precsim C}$$

Ahora, supondremos por Contradicción que $C \precsim A$. Como por Hipótesis se tiene que $A \precsim B$, por el Teorema 6.17 se obtendría que $C \precsim B$. Sin embargo, esto contradice la Hipótesis de que $\sim (C \precsim B)$. Luego, se concluye que $\boxed{\sim (C \precsim A)}$. De ambas conclusiones se sigue que $A \prec C$. □

TEOREMA 6.22. *Para la relación $\prec$ se cumple:*

22A. $A \precsim B \implies \sim (B \prec A)$
22B. $A \precsim B \ \wedge \ B \prec C \implies A \prec C$
22C. $A \prec B \ \wedge \ B \precsim C \implies A \prec C$
22D. $A \precsim B \iff A \approx B \vee A \prec B$

Demostración. **22A.** Por Contradicción, supongamos que $B \prec A$. Por Definición 6.4, ello implica que $B \precsim A$ y $\sim (A \precsim B)$. La segunda afirmación contradice la hipótesis. Luego, se concluye que $\boxed{\sim (B \prec A)}$. □

Demostración. **22B.** Por la Tautología lógica $p \wedge q \ \Rightarrow p$ y por el Teorema 6.17, es cierto que:

$$A \precsim B \ \wedge \ B \prec C \implies A \precsim B \ \wedge \ B \precsim C \implies \boxed{A \precsim C}$$

Ahora, supondremos por Contradicción que $C \precsim A$. Como por Hipótesis se tiene que $A \precsim B$, por el Teorema 6.17 se obtendría que $C \precsim B$. Sin embargo, esto contradice la Hipótesis de que $\sim (C \precsim B)$. Luego, se concluye que $\boxed{\sim (C \precsim A)}$. De ambas conclusiones se sigue que $A \prec C$. □

Demostración. **22C.** Por la Tautología lógica $p \wedge q \ \Rightarrow p$ y por el Teorema 6.17, es cierto que:

$$A \prec B \ \wedge \ B \precsim C \implies A \precsim B \ \wedge \ B \precsim C \implies \boxed{A \precsim C}$$

Ahora, supondremos por Contradicción que $C \precsim A$. Como por Hipótesis se tiene que $B \precsim C$, por el Teorema 6.17 se obtendría que $B \precsim A$. Sin embargo, esto contradice la Hipótesis de que $\sim (B \precsim A)$. Luego, se concluye que $\boxed{\sim (C \precsim A)}$. De ambas conclusiones se sigue que $A \prec C$. □

Demostración. **22D.** ($\Longleftarrow$) Si $A \approx B$, por Teorema 6.15 se obtiene $A \precsim B$.

Si $A \prec B$, por Definición 6.4 y por Tautología $p \wedge q \Rightarrow p$, se obtiene $A \precsim B$.

($\Longrightarrow$) Ahora, suponemos verdadero que $A \precsim B$.

Si además $\sim (B \precsim A)$, se obtiene por Definición 6.4 que $A \prec B$.

En cambio, si $(B \precsim A)$, por el Teorema 6.18 se obtiene que $A \approx B$.

Por lo tanto, $A \precsim B \iff A \approx B \vee A \prec B$. □

TEOREMA 6.23. ***(Teorema de Cantor)*** $A \prec \mathcal{P}(A)$

Demostración. A partir del Teorema 6.22D, demostraremos que $A \precsim \mathcal{P}(A)$ y que $\sim (A \approx \mathcal{P}(A))$.

Para demostrar que $A \precsim \mathcal{P}(A)$, debemos determinar una función $f : A \longrightarrow B \subseteq \mathcal{P}(A)$ que sea biyectiva. Esta función será $f : A \longrightarrow B\ ,\ f(a) = \{a\}$.

Con ello, si definimos $B = \{\ \{a\}, a \in A\}$, se obtiene de inmediato que f es sobreyectiva. Además, la inyectividad se obtiene inmediatamente del **Axioma ZF1**.

Ahora, para demostrar que $\sim (A \approx \mathcal{P}(A))$, por Contradicción supondremos que ellos sí son equipotentes. Esto significa que existiría una función $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ biyectiva.

Como acabamos de demostrar, toda función de A en $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ es inyectiva, por lo que debemos contradecir la sobreyectividad. Es decir, debemos hallar un conjunto $S \in \mathcal{P}(A)$ para el cual no sea posible hallar $a \in A$ tal que $g(a) = S$.

Georg Cantor (1845−1918) propuso el siguiente conjunto: $\boxed{S = \{x \in A\ :\ x \notin g(x)\}}$.

Como $S \subseteq A$, y suponiendo por Contradicción que existe $a \in A$ tal que $S = g(a)$, se obtiene:

- Si $a \in S$, entonces $a \notin g(a)$; es decir, $a \notin S$.
- Si $a \in A - S$, entonces $a \in g(a)$; es decir, $a \in S$.

Por lo tanto, no existe $a \in A$ tal que $g(a) = S$, por lo que la función g no es sobreyectiva y, por lo tanto, g no es biyectiva.

De todo lo anterior, vemos que $A \precsim \mathcal{P}(A)$ y que $\sim (A \approx \mathcal{P}(A))$. Por lo tanto, $\boxed{A \prec \mathcal{P}(A)}$. □

6.2.1. Ejercicios Propuestos

6.1. (Solución 6.1) **Si** $A \subseteq B$ **y** $C \subseteq D$**, demostrar que** $A \cup C \subseteq B \cup D$.

6.2. (Solución 6.2) **Si** $A \subseteq B$ **y** $C \subseteq D$**, demostrar que** $A \times C \subseteq B \times D$.

6.3. (Solución 6.3) **Demostrar que** $A \precsim B \iff A \times C \precsim B \times C$.

6.4. (Solución 6.4) **Si** $B \neq \varnothing$**, demostrar que** $A \precsim A \times B$.

6.2.2. Una solución para los Ejercicios

6.1. (Ejercicio 6.1) ***Solución.*** Si $x \in A \cup C$, entonces $x \in A\ \vee\ x \in C$. De allí, usando las hipótesis, se sigue que $x \in B\ \vee\ x \in D$. Así, se obtiene $x \in B \cup D$. □

6.2. (Ejercicio 6.2) ***Solución.*** Si $(x, y) \in A \times C$, entonces $x \in A\ \wedge\ y \in C$. De allí, usando las hipótesis, se sigue que $x \in B\ \wedge\ y \in D$. Así, se obtiene $(x, y) \in B \cup D$. □

6.3. (Ejercicio 6.3) ***Solución.*** ($\Longrightarrow$) Como $A \precsim B\ \wedge C \precsim C$, por Teorema 6.19C. se obtiene $A \times C \precsim B \times C$.

($\Longleftarrow$) Suponiendo que $A \times C \precsim B \times C$, por Definición 6.3 existe $D \times C$ tal que $A \times C \approx D \times C$ y $D \times C \subseteq B \times C$. Por Ejercicio 6.1, se sigue que $D \subseteq B$.

Por Ejercicio 4.6, $A \times C \approx D \times C$ equivale a $A \approx D$. Por Definición 6.3 se concluye que $A \precsim B$. □

6.4. (Ejercicio 6.4) ***Solución.*** Del Teorema 4.8 se sabe que $A \approx A \times \{x\}$; luego, por Teorema 6.15 se sigue que $A \precsim A \times \{x\}$.

Como $B \neq \varnothing$, entonces existe $x \in B$. Así, es inmediato que $\{x\} \subseteq B$, de donde se sigue por Teorema 6.16 que $\{x\} \precsim B$ para todo $x \in B$. Luego, por Ejercicio 6.3 se obtiene $A \times \{x\} \precsim A \times B$.

Finalmente, por Teorema 6.17 se concluye que $A \precsim A \times B$. □

Ayudantía 7

Antisimetría de Menor o igual en potencia (Teorema 18)

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

7.1. Requisitos previos

7.1.1. Ejercicios Propuestos

7.1. (Solución 7.1) **Demostrar que si** $X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq A$**, entonces** $A - X \subseteq Y \iff A - Y \subseteq X$.

7.2. (Solución 7.2) **Demostrar que si** $X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq A$**, entonces** $X \subseteq Y \iff A - Y \subseteq A - X$.

7.3. (Solución 7.3) **Demostrar que si** $X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq A$**, entonces** $X \subseteq A - Y \iff Y \subseteq A - X$.

7.4. (Solución 7.4) **Demostrar que si** $f : A \longrightarrow B$ **es función y** $X \subseteq A, Y \subseteq A$ **con** $X \subseteq Y$**, entonces** $f(X) \subseteq f(Y)$.

7.5. (Solución 7.5) **Demostrar que si** $f : A \longrightarrow B$ **es función y** $X \subseteq A, Y \subseteq A$**, entonces** $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

7.6. (Solución 7.6) **Demostrar que si** $f : A \longrightarrow B$ **es función y** $X \subseteq A, Y \subseteq A$**, entonces** $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

7.7. (Solución 7.7) **Verifique si se cumple** $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$ **para** f **inyectiva y/o para** f **no inyectiva**.

7.1.2. Una solución para los Ejercicios

7.1. (Ejercicio 7.1) ***Solución.***

$$
\begin{aligned}
\text{(Hip) } A - X \subseteq Y &\iff \forall a \, (\, a \in A - X \ \Rightarrow \ a \in Y) \iff \forall a \, (\, a \in A \ \wedge \ a \notin X \ \Rightarrow \ a \in Y) \\
&\iff \forall a \, (\sim (a \in A \ \wedge \ a \notin X) \ \vee a \in Y) \iff \forall a \, (\, (a \notin A \ \vee \ a \in X) \ \vee a \in Y) \\
&\iff \forall a \, (\, a \notin A \ \vee \ (a \in X \ \vee a \in Y) \,) \iff \forall a \, (\, a \notin A \ \vee \ (a \in Y \ \vee a \in X) \,) \\
&\iff \forall a \, (\, (a \notin A \ \vee \ a \in Y) \ \vee a \in X \,) \iff \forall a \, (\sim (a \in A \ \wedge \ a \notin Y) \ \vee a \in X \,) \\
&\iff \forall a \, (\, a \in A \ \wedge \ a \notin Y \ \Rightarrow \ a \in X \,) \iff \forall a \, (\, a \in A - Y \ \Rightarrow \ a \in X \,) \\
&\iff A - Y \subseteq X
\end{aligned}
$$

□

7.2. (Ejercicio 7.2) ***Solución.*** $A - [Y] \subseteq (A - X) \overset{\text{Ejercicio 7.1}}{\iff} A - (A - X) \subseteq [Y] \overset{A-(A-X)=X}{\iff} X \subseteq Y$

□

7.3. (Ejercicio 7.3) ***Solución.*** $[X] \subseteq (A - Y) \overset{\text{Ej. 6B}}{\iff} A - (A - Y) \subseteq A - [X] \overset{A-(A-Y)=Y}{\iff} Y \subseteq A - X$

□

7.4. (Ejercicio 7.4) ***Solución.*** Sea $b \in f(X)$. Por definición de imagen, existe $a \in X$ tal que $f(a) = b$. Como $X \subseteq Y$, entonces existe $a \in Y$ tal que $f(a) = b$; finalmente, por definición de imagen se concluye que $b \in f(Y)$. □

7.5. (Ejercicio 7.5) ***Solución.*** Como $X \subseteq X \cup Y$, por Ejercicio 7.4 sigue $f(X) \subseteq f(X \cup Y)$. Análogamente, $f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$. Con ello, se obtiene $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$.

Ahora, sea $b \in f(X \cup Y)$. Por definición de imagen, existe $a \in X \cup Y$ tal que $f(a) = b$. Si $a \in X$, entonces $b \in f(X)$; en tanto, si $a \in Y$, entonces $b \in f(Y)$. De ambos casos se obtiene $b \in f(X) \cup f(Y)$; así, se concluye que $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$, obteniendo lo pedido. □

7.6. (Ejercicio 7.6) ***Solución.*** Sea $b \in f(X \cap Y)$. Entonces existe $a \in X \cap Y$ tal que $b = f(a)$. Como $a \in X \wedge a \in Y$, entonces $b \in f(X) \wedge b \in f(Y)$. Finalmente, se concluye que $b \in f(X) \cap f(Y)$. □

7.7. (Ejercicio 7.7) ***Solución.*** Si $b \in f(X) \cap f(Y)$, es inmediato que $b \in f(X) \wedge b \in f(Y)$. Entonces, existen $a_1 \in X$ y $a_2 \in Y$ tales que $b = f(a_1) \wedge b = f(a_2)$; es decir, $f(a_1) = f(a_2)$.

- Si f es inyectiva, entonces para todo $a_1, a_2 \in A$ se cumple $f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2\ (= a)$. Como $a = a_1 \in X$ y $a = a_2 \in Y$, entonces $a \in X \cap Y$ y es tal que $f(a) = b$. Así, se obtiene que $b \in f(X \cap Y)$. Es decir, si f es inyectiva, entonces $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
- Si f no es inyectiva, entonces existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)\ (= b)\ \wedge\ a_1 \neq a_2$. Por Contraejemplo, si hacemos $X = \{a_1\}, Y = \{a_2\}$, vemos que $X \cap Y = \varnothing$, de donde se sigue que $f(X \cap Y) = \varnothing$. Por otra parte, vemos que $f(X) \cap f(Y) = \{b\}$. Como $\{b\} \nsubseteq \varnothing$, entonces $f(X) \cap f(Y) \nsubseteq f(X \cap Y)$.

□

7.2. Unión sobre una familia de conjuntos

DEFINICIÓN 7.5. Se denomina suma o unión de una familia de conjuntos F al conjunto que reúne a todos los elementos que pertenecen a algún miembro de F:

$$\boxed{\bigcup F = \{x \mid (\exists D\ :\ x \in D\ \wedge D \in F)\}}$$

Algunos ejemplos:

- Si $F = \{\ \{a,b\}; \{b,c\}; \{d\}; e\ \}$, entonces $\bigcup F = \{a,b,c,d\}$, pues:
  - $a \in \{a,b\}$ y $\{a,b\} \in F$, por lo que $a \in \bigcup F$.
  - $b \in \{a,b\}$ y $\{a,b\} \in F$ (o bien $b \in \{b,c\}$ y $\{b,c\} \in F$), por lo que $b \in \bigcup F$.
  - $c \in \{b,c\}$ y $\{b,c\} \in F$, por lo que $c \in \bigcup F$.
  - $d \in \{d\}$ y $\{d\} \in F$), por lo que $d \in \bigcup F$.
  - $e \in F$ pero $F \notin F$ (o bien $\forall D \in F\ (e \notin D)\ )$, por lo que $e \notin \bigcup F$.
- Si $F = \{0,1,2\}$ y consideramos los números como meros elementos, se obtendría $\bigcup F = \varnothing$. Por ello, debemos necesariamente reescribir los elementos de F como conjuntos, obteniéndose $F = \{\varnothing; \{\varnothing\}; \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ \}$. Luego, vemos que:
  - $\varnothing \in \{\varnothing\}$ y $\{\varnothing\} \in F$, por lo que $\varnothing \in \bigcup F$.
  - $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ y $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in F$, por lo que $\{\varnothing\} \in \bigcup F$.

  Con ello, $\bigcup F = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0,1\} = 2$.

7.2.1. Ejercicios propuestos

7.8. (Solución 7.8) **Demostrar que** $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

7.9. (Solución 7.9) **Demostrar que** $\bigcup \{\varnothing\} = \varnothing$.

7.10. (Solución 7.10) **Demostrar que** $\bigcup \{A\} = A$.

7.11. (Solución 7.11) **Demostrar que** $\bigcup \{A, B\} = A \cup B$.

7.12. (Solución 7.12) **Demostrar que** $\bigcup (a, b) = \{a, b\}$.

7.13. (Solución 7.13) **Demostrar que** $A \in B \implies A \subseteq \left(\bigcup B\right)$.

7.14. (Solución 7.14) **Demostrar:** $A \subseteq B \implies \left(\bigcup A\right) \subseteq \left(\bigcup B\right)$.

7.15. (Solución 7.15) **Demostrar:** $\bigcup (A \cup B) = \left(\bigcup A\right) \cup \left(\bigcup B\right)$.

7.16. (Solución 7.16) **Demostrar que si** $(\forall A)(A \in B \implies A \subseteq C)$**, entonces** $\left(\bigcup B \subseteq C\right)$.

7.2.2. Una solución para los ejercicios

7.8. (Ejercicio 7.8) ***Solución.*** De la Definición 7.5 se obtiene $\bigcup \varnothing = \{x \mid (\exists D : x \in D \ \wedge D \in \varnothing)\}$. Es evidente que $\sim (D \in \varnothing)$, por lo que para todo x no se cumplirá la condición de pertenencia. Así, $\bigcup \varnothing = \varnothing$. □

7.9. (Ejercicio 7.9) ***Solución.*** De la Definición 7.5 se obtiene $\bigcup \{\varnothing\} = \{x \mid (\exists D : x \in D \wedge D \in \{\varnothing\})\}$. Es claro que $D = \varnothing$ es tal que $D \in \{\varnothing\}$, por lo que todo x debe cumplir con $x \in \varnothing$, lo que es absurdo. Luego, para todo x no se cumplirá la condición de pertenencia, por lo que $\bigcup \{\varnothing\} = \varnothing$. □

7.10. (Ejercicio 7.10) ***Solución.*** De la Definición 7.5 sigue $\bigcup \{A\} = \{x \mid (\exists D : x \in D \wedge D \in \{A\})\}$. Es claro que $D = A$ cumple con $D \in \{A\}$, por lo que todo $x \in A$ pertenece al conjunto. Por ello, $\bigcup \{A\} = A$. □

7.11. (Ejercicio 7.11) ***Solución.*** A partir de la Definición 7.5 se obtiene que $\bigcup \{A, B\} = \{x \mid (\exists D : x \in D \ \wedge D \in \{A, B\})\}$. Si $D = A$, se cumple con $D \in \{A, B\}$, mientras que si $D = B$ también se cumple. Por ello, todo $x \in A \cup B$ pertenece al conjunto. Por ello, $\bigcup \{A, B\} = A \cup B$. □

7.12. (Ejercicio 7.12) ***Solución.*** A partir de la Definición 7.5 se obtiene $\bigcup \{(a, b)\} = \{x \mid (\exists D : x \in D \ \wedge D \in \{\{a\}; \{a, b\}\})\}$. Vemos que $a \in \{a\}$ y $\{a\} \in (a, b)$, por lo que $a \in \bigcup (a, b)$. De la misma forma, $b \in \{a, b\}$ y $\{a, b\} \in (a, b)$, por lo que $b \in \bigcup (a, b)$. Por ello, $\bigcup (a, b) = \{a, b\}$. □

7.13. (Ejercicio 7.13) ***Solución.*** A partir de la Definición 7.5 se obtiene $\bigcup B = \{x \mid (\exists D : x \in D \ \wedge D \in B\})\}$. Dado $x \in A$, como además $A \in B$, se cumplen las condiciones de pertenencia. Así, todo elemento de A está en $\bigcup B$, por lo que $A \subseteq \bigcup B$. □

7.14. (Ejercicio 7.14) ***Solución.*** Sea $x \in \bigcup A$. Por Definición 7.5, existe D tal que $x \in D \wedge D \in A$. Como $A \subseteq B$, entonces $D \in B$, por lo que $x \in \bigcup B$. Por lo tanto, $\bigcup A \subseteq \bigcup B$. □

7.15. (Ejercicio 7.15) ***Solución.*** Como $A \subseteq A \cup B$, por Ejercicio 7.14 se obtiene $\bigcup A \subseteq \bigcup (A \cup B)$. Lo mismo ocurre para $B \subseteq A \cup B$. Por ello, se obtiene $\left(\bigcup A\right) \cup \left(\bigcup B\right) \subseteq \bigcup (A \cup B)$.

Ahora, si $x \in \bigcup (A \cup B)$, por Definición 7.5 existe C tal que $x \in C \ \wedge \ C \in A \cup B$. Ello implica que $(x \in C \ \wedge \ C \in A) \ \vee \ (x \in C \ \wedge \ C \in B)$, de donde se obtiene $x \in \left(\bigcup A\right) \cup \left(\bigcup B\right)$. Por lo tanto, $\bigcup (A \cup B) \subseteq \left(\bigcup A\right) \cup \left(\bigcup B\right)$, lo que demuestra la igualdad. □

7.16. (Ejercicio 7.16) ***Solución.*** Sea $x \in \bigcup B$. Por Definición 7.5, existe D tal que $x \in D \wedge D \in B$. Por la hipótesis aplicada sobre D, se sigue que $D \in B \Longrightarrow D \subseteq C$. Con ello, $x \in D \wedge D \subseteq C$, por lo que $x \in C$. Por lo tanto, $\bigcup B \subseteq C$. □

7.3. Demostración guiada de Fraenkel y Whitaker (1953)

TEOREMA 6.18. ***(Cantor-Bernstein-Schroeder)*** $A \lesssim B \ \wedge \ B \lesssim A \implies A \approx B$

Etapa 1. De las hipótesis, se podría definir $\boxed{h : A \longrightarrow B \quad , \quad h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{si } x \in A_1 \\ f(x) & \text{si } x \in A - A_1 \end{cases}}$

Explique por qué esta definición de h no es adecuada.

Etapa 2. Se requiere encontrar $K \subseteq A$ que cumpla con $\boxed{g[B - f(K)] = A - K}$.

Explique cómo esto permitiría resolver el conflicto anterior.

Para encontrar al conjunto K, definimos a propósito una familia de conjuntos F como:

$$\boxed{F = \{C \subseteq A \ : \ g[B - f(C)] \subseteq A - C\}}$$

Etapa 3. Demuestre que $F \neq \varnothing$.

Etapa 4. Si $C \in F$, demostrar que $C \subseteq A - g[B - f(C)]$.

Etapa 5. Si $C_1 \subseteq A$ y $C_2 \subseteq A$ tales que $C_1 \subseteq C_2$, demostrar que $A - g[B - f(C_1)] \subseteq A - g[B - f(C_2)]$.

Etapa 6. Definimos $\boxed{K = \bigcup F}$. Demostrar que $C \in F \implies C \subseteq A - g[B - f(K)]$.

Etapa 7. Demostrar que $K \in F$.

Etapa 8. Definimos $\boxed{H = A - g[B - f(K)]}$. Demostrar que $H \in F$.

Etapa 9. Demostrar que $K = H$ y que K cumple con $\boxed{g[B - f(K)] = A - K}$.

Ahora sí, es posible definir a la función $\boxed{h : A \longrightarrow B \quad , \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in A - K \end{cases}}$

Etapa 10. Verifique que h está bien definida.

Etapa 11. Demuestre que h es sobreyectiva.

Etapa 12. Demuestre que h es inyectiva.

Así, vemos que la función $h : A \longrightarrow B$ es biyectiva, de donde se concluye que $A \approx B$.

Observar que la demostración del **recíproco del Teorema 6.18** se puede hacer fácilmente a partir de los Teoremas anteriores.

7.4. Demostración de Fraenkel y Whitaker (1953) resuelta

TEOREMA 6.18. ***(Cantor-Bernstein-Schroeder)*** $A \lesssim B \ \wedge \ B \lesssim A \implies A \approx B$

***Demostración*:** Considerando las hipótesis, por Definición 6.3 existen $f\colon A \to B_1$ biyectiva, con $B_1 \subseteq B$, además de $g\colon B \to A_1$ biyectiva, con $A_1 \subseteq A$. Buscamos definir $h\colon A \to B$ biyectiva.

A partir de g se define también $g^{-1}\colon A_1 \to B$, que también es biyectiva.

Etapa 1. De las hipótesis, se podría definir $\boxed{h\colon A \to B \quad , \quad h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{si } x \in A_1 \\ f(x) & \text{si } x \in A - A_1 \end{cases}}$

Como $g(B) = A_1$, entonces sigue que $g^{-1}(A_1) = B$. Además, vemos que:

$$f(A - A_1) = f(A) - f(A_1) = B - f(A_1) \subseteq B$$

Esto significa que existe $y \in B$ tal que $y = h(x_1), x_1 \in A_1$ e $y = h(x_2), x_2 \in A - A_1$.
Es decir, h **no** es función.

Etapa 2. Para que h sea función, se requiere encontrar $K \subseteq A$ tal que $g^{-1}\colon A - K \to B - f(K)$, o bien $g\colon B - f(K) \to A - K$. Es decir, que $K \subseteq A$ cumpla con $\boxed{g[B - f(K)] = A - K}$.

Para encontrar al conjunto K, definimos a propósito una familia F de subconjuntos de A como: $\boxed{F = \{C \subseteq A \ : \ g[B - f(C)] \subseteq A - C\}}$ **. Vemos que** $F \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Etapa 3. Para ver que $F \neq \varnothing$, hacemos $C = \varnothing$. Se tiene $\varnothing \subseteq A$ y $A - \varnothing = A$. Además, $f(\varnothing) = \varnothing$, de donde $B - f(\varnothing) = B - \varnothing = B$. De allí sigue que $g[B - f(\varnothing)] = g(B) = A_1 \subseteq A$. Con ello, se obtiene $g[B - f(\varnothing)] \subseteq A - \varnothing$, por lo que $\varnothing \in F$.

Etapa 4. Si $C \in F$, por definición de F se obtiene $g[B - f(C)] \subseteq A - C$. Por Ejercicio 7.3, se obtiene $\boxed{C \subseteq A - g[B - f(C)]}$ (1)

Etapa 5. Si $C_1 \subseteq A$ y $C_2 \subseteq A$ tales que $C_1 \subseteq C_2$, por Ejercicio 7.4 sigue $f(C_1) \subseteq f(C_2)$. Por Ejercicio 7.2 se obtiene $B - f(C_2) \subseteq B - f(C_1)$. Nuevamente por Ejercicio 7.4, esto implica que $g[B - f(C_2)] \subseteq g[B - f(C_1)]$, mientras que por Ejercicio 7.2 se obtiene como resultado $\boxed{A - g[B - f(C_1)] \subseteq A - g[B - f(C_2)]}$ (2)

Etapa 6. Si $C \in F$, por Ejercicio 7.13 se sigue $C \subseteq \bigcup F$. Como sabemos que $F \subseteq \mathcal{P}(A)$, por Ejercicio 7.14 se obtiene $\bigcup F \subseteq \bigcup \mathcal{P}(A) = A$. Definimos $\boxed{K = \bigcup F}$ y a partir de (1) y (2) se justifica que:

$$C \in F \overset{(1)}{\implies} C \subseteq A - g[B - f(C)] \overset{(2)}{\subseteq} A - g[B - f(K)] \implies \boxed{C \subseteq A - g[B - f(K)]} \ (3)$$

Etapa 7. A partir de (3) y considerando también que $C \in F$, debido al Ejercicio 7.16 se obtiene que $\boxed{K = \bigcup F \subseteq A - g[B - f(K)]}$ (4) Por lo tanto, $K \in F$.

Etapa 8. Definimos $\boxed{H = A - g[B - f(K)]}$. Es evidente que $H \subseteq A$ y por (4) se sabe que $K \subseteq H$. A partir de (2) se obtiene:

$$A - g[B - f(K)] \overset{(2)}{\subseteq} A - g[B - f(H)] \implies H \subseteq A - g[B - f(H)] \overset{\text{Ejercicio 7.3}}{\implies} g[B - f(H)] \subseteq A - H$$

Por lo tanto, $H \in F$.

Etapa 9. Como $H \in F$, por Ejercicio 7.13 se obtiene que $H \subseteq \bigcup F = K$, de donde se obtiene $K = H$. Esto significa que $K = A - g[B - f(K)]$. De $K \subseteq A - g[B - f(K)]$ se obtiene por Ejercicio 7.3 que $g[B - f(K)] \subseteq A - K$, mientras que de $A - g[B - f(K)] \subseteq K$ se obtiene por Ejercicio 7.1 que $A - K \subseteq g[B - f(K)]$. Por lo tanto, el conjunto $\boxed{K = \bigcup F}$ cumple con $\boxed{g[B - f(K)] = A - K}$.

Ahora sí, es posible definir a la función $h : A \longrightarrow B \quad , \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in A - K \end{cases}$

Etapa 10. La función h está bien definida, pues si $x \in K$, entonces $h(x) = f(x) \in f(K)$, mientras que si $x \in A - K$, entonces $h(x) = g^{-1}(x) \in g^{-1}(A - K) = B - f(K)$. Además, ya sabemos que $f(K) \cup B - f(K) = B$ y que $f(K) \cap B - f(K) = \varnothing$.

Etapa 11. Para demostrar que h es sobreyectiva, tomamos $y \in B$. Casos: $y \in f(K) \ \vee \ y \in B - f(K)$.

- Si $y \in f(K)$, como $K \subseteq A$, por Ejercicio 7.4 sigue $f(K) \subseteq f(A) = B_1$. Como f es biyectiva, entonces existe $x \in K$ tal que $y = f(x) = h(x)$.
- Si $y \in B - f(K)$, como $B - f(K) \subseteq B$, por Ejercicio 7.4 sigue $g[B - f(K)] \subseteq g(B) = A_1$. Como g^{-1} es biyectiva, entonces existe $x \in A - K$ tal que $y = g^{-1}(x) = h(x)$.

Por lo tanto, $B = \mathrm{Rec}(h)$ y h es sobreyectiva.

Etapa 12. Si $x_1, x_2 \in K$, entonces $h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
Si $x_1, x_2 \in A - K$, entonces $h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
Si $x_1 \in K$ y $x_2 \in A - K$, entonces $x_1 \neq x_2$. Mientras que $h(x_1) = f(x_1) \in f(K)$ y además $h(x_2) = g^{-1}(x_2) \in B - f(K)$. Como $f(K) \cap B - f(K) = \varnothing$, se obtiene $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Por lo tanto, h es inyectiva.

Así, vemos que la función $h : A \longrightarrow B$ es biyectiva, de donde se concluye que $A \approx B$ $\square$.

Observar que la demostración del **recíproco del Teorema 6.18** se puede hacer fácilmente a partir de los Teoremas anteriores, pues por Teorema 6.15 de $A \approx B$ se deduce que $A \precsim B$, mientras que de $A \approx B$ se deduce por Teorema 4.2 que $B \approx A$ y de allí, por Teorema 6.15, se obtiene $B \precsim A$.

Ayudantía 8

Conjuntos Finitos (Parte 1)

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

8.1. Conjunto Finito según Tarski

DEFINICIÓN 8.6. Se dice que el conjunto x es un *elemento minimal* de una familia de conjuntos K si y sólo si: $\boxed{x \in K \ \wedge \ (\forall B \in K, B \neq x)(B \nsubseteq x)}$

DEFINICIÓN 8.7. Se dice que el conjunto x es un *elemento maximal* de una familia de conjuntos K si y sólo si: $\boxed{x \in K \ \wedge \ (\forall B \in K, B \neq x)(x \nsubseteq B)}$

Ejemplo 1. $A = \{1, 2, 3\}$ y $K_1 = \{\{1\}; \{3\}; \{1, 2\}\}$

- $\{1\}$ es elemento minimal de K_1, pues $\{3\} \nsubseteq \{1\}$ y $\{1, 2\} \nsubseteq \{1\}$.
- $\{3\}$ es elemento minimal de K_1, pues $\{1\} \nsubseteq \{3\}$ y $\{1, 2\} \nsubseteq \{3\}$.
- $\{1, 2\}$ NO es elemento minimal de K_1, pues $\{3\} \nsubseteq \{1, 2\}$ pero $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$.
- $\{1\}$ NO es elemento maximal de K_1, pues $\{1\} \nsubseteq \{3\}$ pero $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$.
- $\{3\}$ es elemento maximal de K_1, pues $\{3\} \nsubseteq \{1\}$ y $\{3\} \nsubseteq \{1, 2\}$.
- $\{1, 2\}$ es elemento maximal de K_1, pues $\{1, 2\} \nsubseteq \{1\}$ y $\{1, 2\} \subseteq \{3\}$.

Ejemplo 2. $A = \{1, 2, 3\}$ y $K_2 = \{\varnothing; \{1, 3\}; A\}$

- $\varnothing$ es elemento minimal de K_2, pues $(\forall B)(\varnothing \subseteq B)$ (y no al revés).
- Luego, ningún otro $B \in K_2$ podrá ser elemento minimal, pues $\varnothing \subseteq B$.
- $\varnothing$ NO es elemento maximal de K_2, pues $(\forall B)(\varnothing \subseteq B)$.
- $\{1, 3\}$ NO es elemento maximal de K_2, pues $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
- A es elemento maximal de K_2, pues $A \nsubseteq \{1, 3\}$.

Ejemplo 3. Definimos en $\mathbb{N}$ el conjunto $N_k = \mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Por ejemplo, $N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; $N_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$; $N_3 = \{3, 4, 5, \ldots\}$; etc.
Si consideramos la familia de N_k como $K = \{N_1; N_2; \ldots; N_k; \ldots\}$, vemos que:

- N_1 NO es elemento minimal de K, pues $N_2 \subseteq N_1$.
- N_2 NO es elemento minimal de K, pues $N_1 \nsubseteq N_2$ pero $N_3 \subseteq N_2$.
- En general, N_k NO es elemento minimal de K, pues siempre $N_{k+1} \subseteq N_k$.
- N_1 es elemento maximal de K, pues $(\forall k \in \mathbb{N})(N_1 \nsubseteq N_k)$ (1 está en N_1 y en ninguno más).

DEFINICIÓN 8.8. Alfred Tarski (1901−1983), en 1924.
Se dice que el conjunto A es finito si y sólo si TODA familia NO VACÍA de subconjuntos de A tiene elemento minimal.

TEOREMA 8.24. *$\varnothing$ es finito.*

Demostración. Sabemos que $(\forall A)(\varnothing \subseteq A)$. Entonces, la única familia de subconjuntos posible de definir para $\varnothing$ es $K = \{\varnothing\} = \mathcal{P}(\varnothing)$.

Evidentemente, $\varnothing$ es nuestro único candidato a elemento minimal de K. Por Contradicción, suponemos que $\varnothing$ no es elemento minimal de K; es decir, negamos la Definición 8.6:

$$\begin{aligned} \sim [\varnothing \in K \ \wedge \ (\forall B \in K)(B \nsubseteq \varnothing)] &\iff \sim (\varnothing \in K) \ \vee \ \sim [(\forall B \in K)(B \nsubseteq \varnothing)] \\ &\iff \varnothing \notin K \ \vee \ (\exists B \in K)(B \subseteq \varnothing) \end{aligned}$$

Ya vemos que es falso que $\varnothing \notin K$. Sin embargo, vemos que la otra condición se cumple, pues $B = \varnothing$ la cumple. Siempre será complicado demostrar que una condición ligada a subconjuntos de $\varnothing$ es falsa. En este caso, podemos asumir su falsedad ***suponiendo que*** $B \neq \varnothing$.

En primer lugar, no existe $B \neq \varnothing$ tal que $B \in K$. Si suponemos que existe, entonces contradecimos que $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, lo que sabemos que es cierto.

Por ello, en la Definición 8.6 y Definición 8.7, es necesario suponer que $\boxed{B \neq x}$.

Como sea, $\varnothing$ es elemento minimal de K y, por tanto, $\varnothing$ es finito. □

TEOREMA 8.25. *$\{x\}$ es finito.*

Demostración. Vemos que $\mathcal{P}(\{x\}) = \{\varnothing, \{x\}\}$. Luego, tenemos solamente 3 posibilidades para "familias de subconjuntos de $\{x\}$":

- $K_1 = \{\varnothing\}$, de la que ya sabemos que tiene elemento minimal.
- $K_2 = \{\varnothing, \{x\}\}$. Aprovechamos de establecer que $\varnothing$ es elemento minimal de cualquier conjunto en que se encuentre, pues $(\forall B)(\varnothing \subseteq B)$ (y no al revés).
- $K_3 = \{x\}$. En este caso, podemos intuir el mismo dilema lógico que tuvimos al demostrar el Teorema 8.24, al haber un único candidato a elemento minimal. Por ello, asumiremos una explicación análoga y daremos por demostrado este Teorema. Hay varias formas de salir de este dilema intuitivamente, siendo la más digna decir que todo conjunto con un elemento será equipotente con $\{\varnothing\}$.

□

TEOREMA 8.26. *Si A es finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito.*

Demostración. Hemos visto que siempre existe una familia no vacía de subconjuntos de B (incluso si $B = \varnothing$). Digamos que esa tal familia es K.

Pues bien, como $B \subseteq A$, entonces K es una familia no vacía de subconjuntos de A. Luego, como A es finito, por Definición 8.8 se sigue que K tiene un elemento minimal. Por lo tanto, B es finito. □

TEOREMA 8.27. *Si A es finito, entonces $A \cap B$ es finito y $A - B$ es finito.*

Demostración. Como $A \cap B \subseteq A$ y $A - B \subseteq A$, por Teorema 8.26, ambos son finitos. □

TEOREMA 8.28. *Si A y B son finitos, entonces $A \cup B$ es finito.*

Demostración. Por Definición 8.8, debemos demostrar que toda familia de subconjuntos de $A \cup B$ tiene elemento minimal.

Pues bien, sea K una familia no vacía de subconjuntos de $A \cup B$. Definiremos primero una familia de subconjuntos de A, que llamaremos L, que nos permitirá controlar mejor a los subconjuntos de A:

$$\boxed{L = \{C \mid (C \subseteq A) \ \wedge \ (\exists D \subseteq B) : (C \cup D \in K)\}}$$

En primer lugar, $L \neq \varnothing$, pues si $E \in K$, entonces $C = E \cap A$ es tal que $C \in L$. Vemos que $E \in K \Rightarrow E \subseteq A \cup B$, de donde se sigue que $E \cap A \subseteq (A \cup B) \cap A = A$. Además, vemos que $D = E - A$ es tal que $E - A \subseteq (A \cup B) - A = B - A \subseteq B$ y que $C \cup D = (E \cap A) \cup (E - A) \subseteq A \cup B$.

Ahora, como A es finito y $(\forall C)(C \subseteq A)$, entonces L es una familia de subconjuntos de A; por Definición 8.8, L tiene elemento minimal. Digamos que x_m es tal elemento minimal.

Como ya pudimos controlar a los subconjuntos de A mediante L, con el mismo objetivo definimos ahora una familia de subconjuntos de B, que llamaremos M:

$$\boxed{M = \{F \mid (F \subseteq B) \ \wedge \ F \cup x_m \in K\}}$$

Nuevamente, vemos que $M \neq \varnothing$, pues como $x_m \in L$, se sigue que $x_m \subseteq A$; luego, dado $F = \varnothing \subseteq B$, entonces $F \cup x_m \subseteq A \cup B$.

Además, como B es finito y $(\forall F)(F \subseteq B)$, entonces M es una familia de subconjuntos de B; por Definición 8.8, M tiene elemento minimal. Digamos que y_m es tal elemento minimal.

Contamos hasta el momento con $x_m \in L$ y $y_m \in M$ elementos mínimos de L y M, respectivamente. Vemos que $x_m \cup y_m \in K$ por definición de M. Por ello, $x_m \cup y_m$ parece ser un buen candidato a mínimo de K, lo que demostraremos a continuación.

Por Contradicción, supondremos que existe un mejor candidato a minimal de K; digamos $z \in K$ tal que $\boxed{z \subset x_m \cup y_m}$ **(subconjunto pero no igual)**. Primero, lo descomponemos en 2 partes para estudiarlo mejor:

$$z \in K \Longrightarrow \boxed{z \subseteq A \cup B}$$

$$z \subseteq x_m \cup y_m \Longrightarrow G \cap x_m \subseteq (x_m \cup y_m) \cap x_m = x_m \wedge x_m \subseteq A \Longrightarrow \boxed{z \cap x_m \subseteq A}$$

$$z \subseteq x_m \cup y_m \Longrightarrow z \cap y_m \subseteq (x_m \cup y_m) \cap y_m = y_m \wedge y_m \subseteq B \Longrightarrow \boxed{z \cap y_m \subseteq B}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(z \cap x_m) \cup (z \cap y_m) \subseteq A \cup B}$$

Verificamos que estas dos partes unidas nos retornen z:

$$(z \cap x_m) \cup (z \cap y_m) = z \cap (x_m \cup y_m) = z \text{ (pues } z \subset x_m \cup y_m)$$

Ahora, veremos cómo aprovechar estas dos partes. Primero, vemos que $\boxed{z \cap x_m \in L}$, pues $z \cap x_m \subseteq A$ y $z \cap y_m \subseteq B$ tal que $z \subseteq A \cup B$ y, por tanto, $z \in K$ (ver a z como unión de las dos partes). Luego, como $z \cap x_m \in L$ y x_m es minimal de L, entonces $\boxed{z \cap x_m = x_m}$.

Ahora, vemos que $\boxed{z \cap y_m \in M}$, pues $z \cap y_m \subseteq B$ y además:

$$z \in K \quad \Longrightarrow \quad z = (z \cap x_m) \cup (z \cap y_m) = \boxed{x_m \cup (z \cap y_m) \in K}$$

Luego, como $z \cap y_m \in M$ e y_m es minimal de M, entonces $\boxed{z \cap y_m = y_m}$.

Por lo tanto, $\boxed{z = x_m \cup y_m}$, **lo que contradice la hipótesis** y lo establece como elemento minimal de K.

Como** K **es cualquier familia de subconjuntos de** $A \cup B$**, se concluye que** $A \cup B$ **es finito. □

TEOREMA 8.29. *Si A es finito, entonces $A \cup \{x\}$ es finito.*

Demostración. Por Teorema 8.25, $\{x\}$ es finito. Como además A es finito, por Teorema 8.28, se concluye que $A \cup \{x\}$ es finito. □

TEOREMA 8.30. *Si A es finito, entonces toda familia NO VACÍA de subconjuntos de A tiene elemento maximal.*

Demostración. **(Tarski, 1924)** Como A es finito, por Definición 8.8 toda familia de subconjuntos de A tiene elemento minimal.

Dada una familia no vacía K de subconjuntos de A, definimos otra familia L de subconjuntos de A para que un elemento minimal de L nos permita determinar un elemento maximal de K. Apelando a la intuición adquirida al buscar supremo e ínfimo de conjuntos en $\mathbb{R}$, definimos:

$$\boxed{L = \{B \subseteq A \ : \ A - B \in K\}}$$

Como K es no vacía, existe $B \in K$. Observando que $B = A - (A - B)$ y sabiendo que $A - B \subseteq A$, se obtiene que $A - B \in L$, por lo que la familia L es no vacía.

Luego, como L es una familia no vacía de subconjuntos de A, por Definición 8.8 se sigue que L tiene elemento minimal. **Supongamos que** x **es elemento minimal de** L.

Por definición de la clase L, vemos que $A - x \in K$. Verificaremos que $A - x$ sea elemento maximal de K; es decir, que cumpla con la Definición 8.7. Esto lo haremos por Contradicción. Supondremos que existe $y \in K$ tal que $A - x \subseteq y$.

Como $y \in K$, observando nuevamente que $y = A-(A-y)$, vemos por definición de L que $A-y \in L$. Por Ejercicio 7.1, $A-x \subseteq y$ equivale a $A-y \subseteq x$.

Así, hemos encontrado que $A-y \in L$ y además $A-y \subseteq x$. Esto significaría que x **no es elemento minimal de** L, resultando en una Contradicción.

Concluimos que $A-x$ será elemento maximal de K. Así, toda familia K de subconjuntos de un conjunto A finito tendrá elemento maximal. □

TEOREMA 8.31. *Si toda familia NO VACÍA de subconjuntos de A tiene elemento maximal, entonces A es finito.*

Demostración. Sea K una familia de subconjuntos de A y **sea** $A-x$ **su elemento maximal**. Definimos la familia L tal como en la demostración anterior. Dado que $A-x \in K$, se obtiene por definición de L que $x \in L$, por lo que L es no vacía.

Ahora, debemos demostrar que x es elemento minimal de L, lo que haremos nuevamente por Contradicción. Suponemos que existe $A-y \in L$ tal que $A-y \subseteq x$. Como $A-y \in L$ y observando nuevamente que $y = A-(A-y)$, se obtiene que $y \in K$.

Ahora, en la demostración anterior ya vimos que $A-y \subseteq x$ es equivalente a decir que $A-x \subseteq y$. **Esto contradice que** $A-x$ **sea elemento maximal de** K, lo que demuestra que L tiene elemento minimal. Finalmente, por Definición 8.8, se concluye que A es finito. □

8.2. Principio de Inducción y Conjuntos Finitos

TEOREMA 8.32. *Dado un conjunto A y una cierta propiedad $p(B)$. Si se cumple que:*

32A. *A es finito.*

32B. *$p(\varnothing)$ (es verdadero).*

32C. $(\forall a \in A)(\forall B \subseteq A)(p(B) \implies p(B \cup \{a\}))$

Entonces $p(A)$ (es verdadero).

Demostración. Supondremos que se cumplen **32A.**, **32B.** y **32C.** Definimos la familia K de subconjuntos $B \subseteq A$ que hacen verdadera la propiedad $p(B)$: $\boxed{K = \{B \subseteq A \,:\, p(B)\}}$.

Con ello, demostrar que se cumple $p(A)$ equivale a demostrar que $A \in K$.

Vemos que $\varnothing \subseteq A$ y por **32B.** se cumple $p(\varnothing)$. Luego, $\varnothing \in K$, por lo que K es no vacía.

Además por **32A.**, se sabe que A es finito. Por Teorema 8.30, sigue que K tiene elemento maximal.

Ahora buscamos demostrar que A es elemento maximal de K; es decir, que cumpla con la Definición 8.7, lo que nos llevaría a que $A \in K$, que es lo que queremos demostrar.

Supondremos por Contradicción que A no es elemento maximal de K; esto significa que existe $x \in K$ tal que $x \subseteq A$, con $x \neq A$ (o, en otras palabras, que x **es elemento maximal de** K). Esto último nos dice que $A-x \neq \varnothing$; es decir, existe $a \in A-x$ o, mejor aún, existe $a \in A$ tal que $a \notin x$.

Como $x \in K$ y $x \subseteq A$, por definición de K se cumple $p(x)$. Como además $a \in A$, por **32C.** se cumple $p(B \cup \{a\})$. También de $a \in A$ se sigue que $\{a\} \subseteq A$; como $x \subseteq A$, entonces $x \cup \{a\} \subseteq A$.

De las conclusiones anteriores se sigue que $x \cup \{a\} \in K$. Si observamos que $x \subseteq x \cup \{a\}$, entonces **se contradice que** x **es elemento maximal de** K.

Así, hemos demostrado que A es elemento maximal de K, de donde se sigue que $A \in K$ y, por definición de K, se cumple $p(A)$. □

TEOREMA 8.33. *Si A es un conjunto finito y K una familia de subconjuntos de A que cumple:*

33A. $\varnothing \in K$.

33B. $(\forall a \in A)(\forall B \subseteq A)(B \in K \implies B \cup \{a\} \in K)$

Entonces $A \in K$.

Demostración. Sea A finito y K una familia de subconjuntos de A que cumple **33A.** y **33B.** Debemos demostrar que $A \in K$, recurriendo a demostrar que se satisface el Teorema 8.32. Es evidente que se satisface **32A.**, pues A es finito. Debemos definir la propiedad $\boxed{p(B) : B \in K}$.

De **33A.** se cumple $p(\varnothing)$. De **33B.** se cumple que $(\forall a \in A)(\forall B \subseteq A)(p(B) \implies p(B \cup \{a\}))$.

Puesto que se satisfacen **32A.**, **32B.** y **32C.**, por el Teorema 8.32 se obtiene $p(A)$, lo que nos permite concluir que $A \in K$. □

TEOREMA 8.34. *A es finito si y solo si A pertenece a TODA familia K de subconjuntos de A que satisface **33A.** y **33B.***

Demostración. ($\implies$) Esto ya está demostrado, pues es exactamente el Teorema 8.33.

($\impliedby$) Suponemos que para toda familia K de subconjuntos de A se cumple que $A \in K$ y además se cumplen **33A.** y **33B.** Debemos demostrar que A es finito.

Si definimos K como la familia de TODOS los subconjuntos finitos de A, al demostrar que $A \in K$ se obtiene de inmediato que A es finito. Por ello, debemos demostrar que este conjunto K satisface también **33A.** y **33B.**

Pues bien, como $\varnothing \subseteq A$ y además $\varnothing$ es finito (por Teorema 8.24), se sigue que $\varnothing \in K$.

Ahora, si $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$. Además, por Teorema 8.25, $\{a\}$ es finito. Si además $B \in K$, esto significa que $B \subseteq A$ y que B es finito. Luego, es fácil ver que $B \cup \{a\} \subseteq A$ y además, por Teorema 8.29, se sigue que $B \cup \{a\}$ es finito; así, $B \cup \{a\} \in K$.

Como nuestro conjunto K satisface **33A.** y **33B.**, por hipótesis se sigue que $A \in K$, de donde se concluye que A es finito. □

TEOREMA 8.35. *(Sierpinski, 1918). A es finito si y solo si A pertenece a TODA familia K de subconjuntos de A que cumple:*

35A. $\varnothing \in K$

35B. $a \in A \implies \{a\} \in K$

35C. $B \in K \ \wedge C \in K \implies B \cup C \in K$

Demostración. ($\impliedby$) Sea K la familia de todos los subconjuntos ***finitos*** de A y suponemos por hipótesis que $A \in K$ y que K cumple con **35A.**, **35B.** y **35C.** Debemos demostrar que A es finito, recurriendo a demostrar que se satisface el Teorema 8.34. Es claro que la hipótesis **35A.** permite satisfacer directamente a **33A.**, por lo que solo nos queda demostrar que se satisface **33B.**

Sea $a \in A$ y $B \subseteq A$ y $B \in K$. Como $a \in A$, por **35B.** se sigue que $\{a\} \in K$. Como además $B \in K$, por **35C.** se sigue que $B \cup \{a\} \in K$. Así, vemos que se satisfacen los requisitos del Teorema 8.34, por lo que se concluye de inmediato que A es finito.

($\implies$) Suponemos que A es finito y que K es una familia de subconjuntos de A que satisface **35A.**, **35B.** y **35C.**. Debemos demostrar que $(\forall K)(A \in K)$. No debemos olvidar que $K \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Por **35A.** se tiene que $\varnothing \in K$, por lo que se satisface **33A.**

De **35B.** se sabe que $a \in A \implies \{a\} \in K$. Suponiendo además que $B \in K$ (es permitido, pues es hipótesis en **35C.**), se sigue por **35C.** que $B \cup \{a\} \in K$. Así, se satisface **33B.** Finalmente, por Teorema 8.33, se sigue que $A \in K$. □

TEOREMA 8.36. *(Kuratowski, 1920). A es finito si y solo si $K = \mathcal{P}(A)$ es la única familia de subconjuntos de A que satisface:*

36A. $K \subseteq \mathcal{P}(A)$

36B. $\varnothing \in K$

36C. $a \in A \implies \{a\} \in K$

36D. $B \in K \ \wedge C \in K \implies B \cup C \in K$

Demostración. ($\implies$) Suponemos que A es finito. Debemos demostrar que $\mathcal{P}(A)$ cumple con **36A.**, **36B.**, **36C.** y **36D.** y, más aún, que es la única familia de subconjuntos de A que lo cumple.

Primero, vemos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$, por lo que se satisface **36A.** Además, sabemos que $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$, por lo que se cumple **36B.** También es evidente que si $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$, de donde $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$, por lo que se satisface **36C.**

Finalmente, de $B \in \mathcal{P}(A)$ y $C \in \mathcal{P}(A)$ se deduce que $B \subseteq A$ y $C \subseteq A$, de donde sigue $B \cup C \subseteq A$, que implica $B \cup C \in \mathcal{P}(A)$, por lo que se cumple **36D.**

Ahora bien, por Contradicción, supondremos que existe otra familia K de subconjuntos de A $(K \neq \mathcal{P}(A))$ que también satisface **36A.**, **36B.**, **36C.** y **36D.** Además, consideraremos un subconjunto cualquiera $D \subseteq A$ (es decir, $D \in \mathcal{P}(A)$. Como A es finito, por Teorema 8.26 se sabe que D es finito. Nuestro objetivo ahora es demostrar que $D \in K$, lo que haremos mediante el Teorema 8.33.

Para ello, ya contamos con que D es finito y que se satisface **33A.** (por **36B.**), por lo que debemos verificar que se satisface **33B.** Pues bien, si $d \in D$, como $D \subseteq A$ se sigue por **36C.** que $\{d\} \in K$. Si además consideramos $B \subseteq A$, entonces $B \in K$. Luego, por **36D.** se obtiene $B \cup \{d\} \in K$.

Como nuestro conjunto K satisface **33A.** y **33B.**, se sigue que $D \in K$. Es decir, a partir de $D \in \mathcal{P}(A)$ obtuvimos que $D \in K$, de donde se obtiene $\mathcal{P}(A) \subseteq K$. Si ahora agregamos que se cumple **36A.**, podemos concluir que $\boxed{K = \mathcal{P}(A)}$, lo que contradice que $K \neq \mathcal{P}(A)$.

Así, $\mathcal{P}(A)$ es la única familia de subconjuntos de A que satisface **36A.**, **36B.**, **36C.** y **36D.**

$(\Longleftarrow)$ Sea K la familia de todos los subconjuntos ***finitos*** de A. Debemos demostrar que K satisface **36A.**, **36B.**, **36C.** y **36D.** Según la demostración previa, como $\mathcal{P}(A)$ es el único conjunto que satisface esas 4 propiedades, se obtendrá que $K = \mathcal{P}(A)$, de donde se seguirá que A es finito.

Pues bien, como K es la familia de todos los subconjuntos finitos de A, en particular $K \subseteq \mathcal{P}(A)$, lo que satisface **36A.** Por otra parte, como $\varnothing \subseteq A$ y, por Teorema 8.24, $\varnothing$ es finito, entonces $\varnothing \in K$, lo que satisface **36B.** Además, si $a \in A$, se sigue que $\{a\} \subseteq A$ y, por Teorema 8.25, $\{a\}$ es finito. Luego, $\{a\} \in K$, lo que satisface **36C.** Por último, si $B \in K$ y $C \in K$, entonces $B \subseteq A$ y $C \subseteq A$, por lo que $B \cup C \subseteq A$. Además, B y C son finitos, de donde por Teorema 8.28 se obtiene $B \cup C$ finito. Luego, $B \cup C \in K$, lo que satisface **36D.** Así, vemos que $K = \mathcal{P}(A)$. Como $A \in \mathcal{P}(A)$, entonces A es un subconjunto finito de A, lo que implica que A es finito. $\square$

Ayudantía 9

Conjuntos Finitos (Parte 2)

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

9.1. Primeras consecuencias

TEOREMA 9.37. *Si A es finito y f es una función cuyo dominio es A y cuyo recorrido es B, entonces B es finito.*

Demostración. Definimos la familia de subconjuntos $\boxed{K = \{C \ : \ C \subseteq A \wedge f(C) \text{ es finito}\}}$. Vemos que $\varnothing \in K$, pues $\varnothing \subseteq A$ y $f(\varnothing) = \varnothing$.

Ahora, suponemos $a \in A$ y $C \in K$. Vemos que $\{a\} \subseteq A$ y además $C \subseteq A$, por lo que $C \cup \{a\} \subseteq A$. Podemos ver fácilmente que $f(\{a\})$ es finito (pues evaluamos la función sobre un conjunto con un solo elemento, lo que evidentemente nos llevará a obtener un nuevo conjunto que también tendrá un solo elemento y, por Teorema 8.25, ese nuevo conjunto es finito). Como $C \in K$, entonces $f(C)$ es finito (por definición del conjunto K). Luego, por Teorema 8.28, se sigue que $f(C) \cup f(\{a\})$ es finito.

Por Ejercicio 7.5, $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$. De allí, $f(C \cup \{a\})$ es finito, lo que nos permite demostrar que $C \cup \{a\} \in K$. Luego, por Teorema 8.33, $A \in K$. Finalmente, como por hipótesis $B = f(A)$, se concluye que B es finito. □

TEOREMA 9.38. *Si A es finito, entonces $\mathcal{P}(A)$ es finito.*

Demostración. Partiendo de que A es finito, queremos demostrar que $\mathcal{P}(A)$ es finito, para lo que utilizaremos el Teorema 8.33. Definimos $\boxed{K = \{B \ : \ B \subseteq A \ \wedge \ \mathcal{P}(B) \text{ es finito}\}}$. Con ello, demostraremos que $A \in K$ y que K satisface **33A.** y **33B.** Vemos rápidamente que $\varnothing \in K$, pues $\varnothing \subseteq A$ y $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ es finito (por Teorema 8.25). Así, se satisface **33A.**

Ahora, para satisfacer **33B.**, suponemos $a \in A$ y $B \in K$. Si $a \in B$, vemos que $\{a\} \subseteq B$, por lo que $B \cup \{a\} = B$ y la propiedad **33B.** se cumple trivialmente.

Por ello, ahora nos ponemos en el caso $a \notin B$. Ya sabemos que $B \cup \{a\} \subseteq A$, pues de $B \in K$ se obtiene que $B \subseteq A$ y de $a \in A$ se sigue $\{a\} \subseteq A$. Por la definición del conjunto, nos queda probar que $\mathcal{P}(B \cup \{a\})$ es finito dado que $\mathcal{P}(B)$ es finito, de donde se obtendrá que $B \cup \{a\} \in K$.

Definimos la función f como conjunto de pares ordenados: $\boxed{f = \{(C, C \cup \{a\}) \ : \ C \in \mathcal{P}(B)\}}$. Vemos rápidamente que el dominio de f es $\mathcal{P}(B)$. Ahora, como $a \notin B$, vemos que $\{a\} \nsubseteq B$, por lo que $\{a\} \notin \mathcal{P}(B)$. Así, se sigue que $C \cup \{a\} \in \mathcal{P}(B \cup \{a\}) - \mathcal{P}(B)$. Así, nuestro candidato a recorrido de f será $\mathcal{P}(B \cup \{a\}) - \mathcal{P}(B)$.

Ahora, si $D \in \mathcal{P}(B \cup \{a\}) - \mathcal{P}(B)$, es claro que $D - \{a\} \in \mathcal{P}(B)$. Así, se sigue que $(D - \{a\}, D) \in f$. Por tanto, hemos probado que $\mathcal{P}(B \cup \{a\}) - \mathcal{P}(B)$ es el recorrido de f.

Por Teorema 9.37, como $\mathcal{P}(B)$ es finito (pues $B \in K$) y f tiene dominio $\mathcal{P}(B)$ y recorrido $\mathcal{P}(B \cup \{a\}) - \mathcal{P}(B)$, se obtiene que $\mathcal{P}(B \cup \{a\}) - \mathcal{P}(B)$ es finito.

Finalmente, si observamos que $\mathcal{P}(B \cup \{a\}) = (\mathcal{P}(B \cup \{a\}) - \mathcal{P}(B)) \cup \mathcal{P}(B)$, por Teorema 8.28 se concluye que $\mathcal{P}(B \cup \{a\})$ es finito. Así, se sigue que $B \cup \{a\} \in K$.

Así, como A es finito y K satisface **33A.** y **33B.**, por Teorema 8.33 se obtiene $A \in K$. En particular, se obtiene que $\mathcal{P}(A)$ es finito, lo que concluye la demostración. □

TEOREMA 9.39. *Si A es una familia finita de conjuntos y todo elemento de A es finito, entonces $\bigcup A$ es finito.*

Demostración. De forma muy similar a la demostración anterior, utilizaremos el Teorema 8.33 y definiremos la ***familia de familias*** K como $\boxed{K = \left\{B \,:\, B \subseteq A \,\wedge\, \bigcup B \text{ es finito}\right\}}$. Debemos demostrar que $A \in K$ y que K satisface **33A.** y **33B.**

Vemos que $\varnothing \in K$, pues $\varnothing \subseteq A$ y $\bigcup \varnothing = \varnothing$ (Ejercicio 7.8). Así, K satisface **33A.**

Para **33B.**, sea $a \in A$ y sea $B \subseteq A$ tal que $B \in K$. Debemos demostrar que $B \cup \{a\} \in K$. Como $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$. Como $B \in K$, entonces $B \subseteq A$. Con ello, $B \cup \{a\} \subseteq A$.

Ahora, por Ejercicio 7.15 se tiene $\bigcup (B \cup \{a\}) = \left(\bigcup B\right) \cup \left(\bigcup \{a\}\right)$. Luego, por Ejercicio 7.10 se tiene $\bigcup \{a\} = a$. Como $a \in A$ y (por Hipótesis) todo elemento de A es finito, entonces a es finito. Como $B \in K$, se sabe que $\bigcup B$ es finito. Luego, por Teorema 8.28, se deduce que $\bigcup (B \cup \{a\})$ es finito. Así, $B \cup \{a\} \in K$, por lo que se satisface **33B.**

Por Teorema 8.33, se sigue que $A \in K$, lo que en particular implica que $\bigcup A$ es finito. □

TEOREMA 9.40. *Si $\mathcal{P}(A)$ es finito, entonces A es finito.*

Demostración. Sea K la familia de todos los subconjuntos ***finitos*** de A. Así, $K \subseteq \mathcal{P}(A)$. Luego, por Teorema 8.26, se sigue que K es una familia finita. Por la misma definición de K, todo elemento de K es finito. Luego, por Teorema 9.39, $\bigcup K$ es finito.

Observamos que si $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$ y, por Teorema 8.25, $\{a\}$ es finito, por lo que $\{a\} \in K$. Por Definición 7.5, como $a \in \{a\}$ y $\{a\} \in K$, entonces $a \in \bigcup K$. Así, todo elemento de A estará en $\bigcup K$, por lo que $A \subseteq \bigcup K$. Como $\bigcup K$ es finito, por Teorema 8.26 se sigue que A es finito. □

TEOREMA 9.41. *Si A es una familia de conjuntos y $\bigcup A$ es finito, entonces A es finito y todo conjunto que sea un elemento de A es finito.*

Demostración. Sea $a \in A$. Por Ejercicio 7.13, se sigue que $a \subseteq \left(\bigcup A\right)$. Como $\bigcup A$ es finito, por Teorema 8.26 se obtiene que a es finito. Así, todo elemento de A es finito.

Por otra parte, como $\bigcup A$ es finito, por Teorema 9.38 se tiene $\mathcal{P}\left(\bigcup A\right)$ es finito.

Por Ejercicio 7.13, si $a \in A$, entonces $a \subseteq \left(\bigcup A\right)$, lo que nos lleva a que $a \in \mathcal{P}\left(\bigcup A\right)$. Por lo tanto, $A \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup A\right)$, de donde por Teorema 8.26 se concluye que A es finito. □

9.2. Equipotencia y Orden en Conjuntos Finitos

TEOREMA 9.42. *Si A es finito y $A \approx B$, entonces B es finito.*

Demostración. Como $A \approx B$, por Definición 4.1 existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, con $\mathrm{Dom}(f) = A$ y $\mathrm{Rec}(f) = B$. Como además A es finito, por Teorema 9.37 se sigue que B es finito. □

TEOREMA 9.43. *Si A es finito y $B \lesssim A$, entonces B es finito.*

Demostración. Como $B \lesssim A$, por Definición 6.3 existe un conjunto C tal que $B \approx C$ y $C \subseteq A$.

Como A es finito y $C \subseteq A$, por Teorema 8.26 se sigue que C es finito. Como además $B \approx C$, por Teorema 9.42 se obtiene que B es finito. □

TEOREMA 9.44. *Si A es finito y B un conjunto cualquiera, entonces $A \prec B \;\vee\; A \approx B \;\vee\; B \prec A$.*

Demostración. Definimos $\boxed{K = \{C \,:\, C \subseteq A \,\wedge (C \prec B \;\vee\; C \approx B \;\vee\; B \prec C)\}}$.

Usaremos el Teorema 8.33 para demostrar que $A \in K$, por lo que debemos demostrar primero que K satisface **33A.** y **33B.** Vemos que $\varnothing \subseteq A$. Como $\varnothing \subseteq B$, por Teorema 6.16, sigue $\varnothing \lesssim B$. Por Teorema 6.22D. se obtiene $(\varnothing \approx B \;\vee\; \varnothing \prec B)$. Así, se obtiene que $\varnothing \in K$, lo que satisface **33A.**

Ahora, para satisfacer **33B.**, suponemos $a \in A$ y $C \in K$. Si $a \in C$, vemos que $\{a\} \subseteq C$, por lo que $C \cup \{a\} = C$ y la propiedad **33B.** se cumple trivialmente. Por ello, suponemos que $a \notin C$.

Como $C \in K$, se sigue que $C \subseteq A$ y que $(C \prec B \ \vee \ C \approx B \ \vee \ B \prec C)$. Como $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$, de donde se obtiene que $\boxed{C \cup \{a\} \subseteq A}$. Debemos analizar los tres casos por separado:

- Si $C \prec B$, por Definición 6.4, $C \lesssim B$. Por Definición 6.3, existe $f : C \longrightarrow D$ biyectiva y $D \subseteq B, D \neq B$. Así, existe $b \in B - D$. Definimos entonces la función:

$$g : C \cup \{a\} \longrightarrow D \cup \{b\} \ , \ g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

  Esta función g será claramente biyectiva, por lo que se sigue que $C \cup \{a\} \approx D \cup \{b\}$. Como $D \subseteq B$ y $b \in B$ implica $\{b\} \subseteq B$, entonces $D \cup \{b\} \subseteq B$; luego, por Definición 6.3, se sigue que $C \cup \{a\} \lesssim B$. Por Teorema 6.22D. se obtiene $\boxed{C \cup \{a\} \prec B \ \vee \ C \cup \{a\} \approx B}$, de donde se concluye que $C \cup \{a\} \in K$.

- Si $C \approx B$, por Simetría (Teorema 4.2), $B \approx C$. Por Teorema 6.15, se obtiene $B \lesssim C$. Como $C \subseteq C \cup \{a\}$, por Teorema 6.16 se sigue $C \lesssim C \cup \{a\}$. Luego, por Transitividad (Teorema 6.17), se obtiene $B \lesssim C \cup \{a\}$. Por Teorema 6.22D. esto implica que $B \prec C \cup \{a\} \ \vee B \approx C \cup \{a\}$, de donde se concluye que $C \cup \{a\} \in K$.

- Si $B \prec C$, como ya vimos que $C \lesssim C \cup \{a\}$, por Teorema 6.22C. se obtiene $B \prec C \cup \{a\}$, de donde se concluye que $C \cup \{a\} \in K$.

Así, en los tres casos, $C \in K \implies C \cup \{a\} \in K$, por lo que se satisface **33B.** De allí, por Teorema 8.33, $A \in K$, lo que en particular implica que $A \prec B \ \vee \ A \approx B \ \vee \ B \prec A$. □

TEOREMA 9.45. *Si A es finito y B no es finito, entonces $A \prec B$.*

Demostración. Por Contradicción, supondremos que $\sim (A \prec B)$. Por Tricotomía (Teorema 9.44), esto implica suponer que se cumple $A \approx B$ o bien $B \prec A$. Para simplificar las cosas, por Simetría (Teorema 4.2), se cumple $B \approx A \ \vee \ B \prec A$. Luego, por Teorema 6.22D. se obtiene $B \lesssim A$.

Como por hipótesis A es finito, por Teorema 9.43 se obtiene que B es finito, lo que contradice la hipótesis de que B no es finito. Por lo tanto, se concluye que $A \prec B$. □

9.3. Conjunto Finito según Dedekind

DEFINICIÓN 9.9. Un conjunto A es finito según Dedekind si y solo si A no es equipotente con ninguno de sus subconjuntos propios:

$$\boxed{A \text{ finito según Dedekind } \iff \forall B \subseteq A, B \neq A \ \sim (A \approx B)}$$

TEOREMA 9.46. *Si A es finito, entonces A es finito según Dedekind.*

Demostración. Por Contradicción, suponemos que A es finito y A **no es finito según Dedekind**. Por negación de la Definición 9.9, existe $B \subseteq A, B \neq A$ tal que $B \approx A$. Por la Definición 4.1, existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Definimos un conjunto K auxiliar como:

$$\boxed{K = \{C \ : \ C \subseteq A \ \wedge \ f(C) \subseteq C \ \wedge f(C) \neq C\}}$$

A partir de $f(A) = B$, como $B \subseteq A$, se obtiene que $f(A) \subseteq A$, lo que lleva a que $A \in K$. Esto significa que K es no vacío. Como A es finito y K es una familia no vacía de subconjuntos de A, por Definición 8.8 se sigue que K **tiene elemento minimal**, digamos x.

Esto implica, por Definición 8.6, que $x \in K$ y que $\forall y \in K, y \neq x (y \nsubseteq x)$.

Como $x \in K$, por la definición de K se tiene que $x \subseteq A \ \wedge \ f(x) \subseteq x \ \wedge \ f(x) \neq x$.

Como $f(x) \subseteq x$ y $x \subseteq A$, por Transitividad se obtiene $\boxed{f(x) \subseteq A} \ \wedge f(x) \neq A$.

Considerando $P \subseteq Q \subseteq A \implies f(P) \subseteq f(Q)$, entonces $\boxed{f[f(x)] \subseteq f(x) \ \wedge \ f[f(x)] \neq f(x)}$

Así, hemos demostrado que $f(x) \in K$. Así, existe $y = f(x) \neq x$ tal que $f(x) \subseteq x$, lo que contradice que x sea elemento minimal de K. Por lo tanto, A **debe ser finito según Dedekind**. □

TEOREMA 9.47. *Si A es finito y $B \neq A$ es tal que $B \subseteq A$, entonces $B \prec A$.*

Demostración. Como $B \subseteq A$, por Teorema 6.16 se cumple $B \lesssim A$. Por Teorema 6.22D. esto implica que $B \approx A$ o bien $B \prec A$. Consideraremos por simetría (Teorema 4.2) que $A \approx B$ o $B \prec A$.

Como A es finito, por Teorema 9.46, A es finito según Dedekind. Como $B \subseteq A, B \neq A$, entonces $\sim (A \approx B)$. Luego, la única posibilidad que resta es $B \prec A$. □

TEOREMA 9.48. *Si A, B, C son finitos y $A \prec B$ y $B \cap C = \varnothing$, entonces $A \cup C \prec B \cup C$.*

Demostración. De $A \prec B$, por Definición 6.4 se sigue que $A \lesssim B \wedge \ \sim (B \lesssim A)$. De $\sim (B \lesssim A)$, por Contrapositivo del Teorema 6.15, se obtiene $\boxed{\sim (B \approx A)}$.

Pues bien, como $A \lesssim B$, entonces existe B_1 tal que $A \approx B_1$ y $\boxed{B_1 \subseteq B}$. Por Teorema 6.16, vemos que $B_1 \lesssim B$, lo que por Teorema 6.22D. implica que $B_1 \prec B \ \vee \ B_1 \approx B$.

Si $B_1 \approx B$, entonces por Transitividad (Teorema 4.3) se obtiene $A \approx B$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$. Por lo tanto, solamente puede ocurrir que $B_1 \prec B$. Luego, por Contrapositivo del Teorema 6.22A. $\sim (B \lesssim B_1)$ y por Contrapositivo del Teorema 6.16 se obtiene $B \nsubseteq B_1$. Esto implica que $\boxed{B \neq B_1}$.

Nuestro objetivo ahora es demostrar que $A \cup C \lesssim B_1 \cup C$. Primero, por Teorema 6.15, $A \approx B_1$ implica $A \lesssim B_1$. Además, por Teorema 4.1 $C \approx C$, lo que por Teorema 6.15 lleva a $C \lesssim C$.

Ahora veremos que $B_1 \cap C = \varnothing$ también se cumple. Por Contradicción, suponer que $x \in B_1 \cap C$. Como $B_1 \subseteq B$, entonces $x \in B \cap C$, lo que contradice que $B \cap C = \varnothing$. Así, se obtiene que $B_1 \cap C = \varnothing$.

Por lo tanto, por Teorema 6.19A. se obtiene $\boxed{A \cup C \lesssim B_1 \cup C}$.

Ahora demostraremos que $B_1 \cup C \prec B \cup C$. Primero, como B y C son finitos, el Teorema 8.28 implica que $B \cup C$ es finito. A estas alturas, es posible demostrar que: $B_1 \subseteq B \Rightarrow B_1 \cup C \subseteq B \cup C$ y que $B_1 \neq B \Leftrightarrow B_1 \cup C \neq B \cup C$. Así, por Teorema 9.47, se obtiene que $\boxed{B_1 \cup C \prec B \cup C}$.

Finalmente, como $A \cup C \lesssim B_1 \cup C$ y $B_1 \cup C \prec B \cup C$, por Teorema 6.22B. se concluye que $\boxed{A \cup C \prec B \cup C}$. □

TEOREMA 9.49. *Si A, B, C, D son finitos y $A \prec B$ y $C \prec D$ y $B \cap D = \varnothing$, entonces $A \cup C \prec B \cup D$.*

Demostración. De $A \prec B$, por la demostración anterior, se deduce que existe $B_1 \subseteq B, B_1 \neq B$ tal que $A \approx B_1$. De igual forma, de $C \prec D$ se deduce que existe $D_1 \subseteq D, D_1 \neq D$ tal que $C \approx D_1$.

Como $A \approx B_1$, por Teorema 6.15 se sigue que $A \lesssim B_1$. De igual forma, de $C \approx D_1$ se sigue que $C \lesssim D_1$. Además, es sencillo ver que $B \cap D = \varnothing$ implica que $B_1 \cap D_1 = \varnothing$. Así, por Teorema 6.19A. se obtiene $\boxed{A \cup C \lesssim B_1 \cup D_1}$.

Ahora demostraremos que $B_1 \cup D \prec B \cup D$. Primero, como B y D son finitos, el Teorema 8.28 implica que $B \cup D$ es finito. A estas alturas, es posible demostrar que: $B_1 \subseteq B \Rightarrow B_1 \cup D \subseteq B \cup D$ y que $B_1 \neq B \Leftrightarrow B_1 \cup D \neq B \cup D$. Así, por Teorema 9.47, se obtiene que $\boxed{B_1 \cup D \prec B \cup D}$.

También demostraremos que $B_1 \cup D_1 \prec B_1 \cup D$. Como B es finito y $B_1 \subseteq B$, por Teorema 8.26 se sigue que B_1 es finito. Ahora, como B_1 y D son finitos, el Teorema 8.28 implica que $B_1 \cup D$ es finito. Nuevamente, es posible demostrar que: $D_1 \subseteq D \Rightarrow B_1 \cup D_1 \subseteq B_1 \cup D$ y que $D_1 \neq D \Leftrightarrow B_1 \cup D_1 \neq B_1 \cup D$. Así, por Teorema 9.47, se obtiene que $\boxed{B_1 \cup D_1 \prec B_1 \cup D}$.

Así, por Transitividad (Teorema 6.21C.) se obtiene que $B_1 \cup D_1 \prec B \cup D$. Como además $A \cup C \lesssim B_1 \cup D_1$, por Teorema 6.22B. se concluye que $\boxed{A \cup C \prec B \cup D}$. □

TEOREMA 9.50. *Si A es finito y $x \notin A$, entonces $A \prec A \cup \{x\}$.*

Demostración. Sea A finito, $x \notin A$ y hacemos $\boxed{K = \{B \ : \ B \subseteq A \ \wedge \ B \prec B \cup \{x\}\ \}}$. Verificaremos primero que K satisface **33A.** y **33B.**

En primer lugar, vemos que $\varnothing \subseteq A$. Además, $\{x\}$ es finito y $\{x\} \neq \varnothing$ es tal que $\varnothing \subseteq \{x\}$. Luego, por Teorema 9.47 se obtiene $\varnothing \prec \{x\}$. Observando que $\varnothing \cup \{x\} = \{x\}$, se obtiene que $\varnothing \prec \varnothing \cup \{x\}$. Así, hemos demostrado que $\varnothing \in K$, por lo que K satisface **33A.**

Ahora, suponemos que $a \in A$ y que $B \subseteq A$ es tal que $B \in K$, de donde $B \prec B \cup \{x\}$. Debemos demostrar que $B \cup \{a\} \in K$; es decir, que $B \cup \{a\} \subseteq A$ y que $B \cup \{a\} \prec (B \cup \{a\}) \cup \{x\}$.

Si $a \in B$, entonces $B \cup \{a\} = B$, por lo que la inducción se cumple trivialmente. Por ello, debemos ponernos en el caso en que $a \notin B$. A estas alturas es fácil demostrar que $B \cup \{a\} \subseteq A$.

Como A es finito y $B \subseteq A$, por Teorema 8.26 B es finito. Además, por Teorema 8.25, $\{a\}$ y $\{x\}$ también son finitos. Aplicando dos veces el Teorema 8.28, se obtiene que $(B \cup \{a\}) \cup \{x\}$ es finito.

Como $x \notin A$, entonces $x \neq a$, por lo que $B \cup \{a\} \subseteq (B \cup \{a\}) \cup \{x\}$. Además, se cumple que $B \cup \{a\} \neq (B \cup \{a\}) \cup \{x\}$. Así, por Teorema 9.47, se concluye que $B \cup \{a\} \prec (B \cup \{a\}) \cup \{x\}$.

Entonces, hemos demostrado que $B \cup \{a\} \in K$ y que K satisface **33B.** Finalmente, por Teorema 8.33, se concluye que $A \in K$; es decir, que $A \prec A \cup \{x\}$. □

TEOREMA 9.51. *Si A, B son finitos, entonces $A \times B$ es finito.*

Demostración. Como A y B son conjuntos finitos, por Teorema 8.28 se obtiene $A \cup B$ finito.

Luego, por Teorema 9.38, $\mathcal{P}(A \cup B)$ es finito.

Aplicando nuevamente el Teorema 9.38, entonces $\mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$ es finito.

Por Ejercicio 9.1 se tiene que $A \times B \subseteq \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$; luego, por Teorema 8.26, se concluye que $A \times B$ es finito. □

TEOREMA 9.52. *Si A, B son finitos, entonces A^B es finito.*

Demostración. Aplicando inducción sobre el exponente y dejando fijo a B, se define el conjunto auxiliar $\boxed{K = \{C \,:\, C \subseteq A \ \wedge\ B^C \text{ es finito}\}}$. Vemos que $\varnothing \subseteq A$, mientras que por Ejercicio 5.1 sabemos que $B^{\varnothing} = \{\varnothing\}$ y por Teorema 8.25 se sigue que $B^{\varnothing}$ es finito.

Así, $\varnothing \in K$, por lo que se satisface **33A.** Para satisfacer **33B.**, suponemos $a \in A$ y $C \in K$. Si $a \in C$, vemos que $\{a\} \subseteq C$, por lo que $C \cup \{a\} = C$ y la propiedad **33B.** se cumple trivialmente.

Por ello, ahora nos ponemos en el caso $a \notin C$. Ya sabemos que $C \cup \{a\} \subseteq A$, pues de $C \in K$ se obtiene que $C \subseteq A$ y de $a \in A$ se sigue $\{a\} \subseteq A$. Por la definición del conjunto, nos queda probar que $B^{C \cup \{a\}}$ es finito dado que B^C es finito, de donde se obtendrá que $C \cup \{a\} \in K$.

A partir del Teorema 5.11 se sabe que $B^{C \cup \{a\}} \approx B^C \times B^{\{a\}}$. Ya sabemos que B^C es finito, mientras que por Ejercicio 5.4 sabemos que $B^{\{a\}} = \{\, \{(a, y)\}, y \in B\}$. Es posible establecer una función $f : B \longrightarrow B^{\{a\}}$ y demostrar que f es sobreyectiva, por lo que $\mathrm{Rec}(f) = B^{\{a\}}$. Así, por Teorema 9.37, se sigue que $B^{\{a\}}$ es finito. Luego, por Teorema 9.51 se obtiene que $B^C \times B^{\{a\}}$ es finito y por Teorema 9.42 se obtiene que $B^{C \cup \{a\}}$ es finito. Con ello, se satisface también la propiedad **33B.**

Finalmente, por Teorema 8.33 se sigue que $A \in K$, que en particular implica que B^A es finito. □

9.3.1. Ejercicios Propuestos

9.1. (Solución 9.1) **Demostrar que** $A \times B \subseteq \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$.

9.3.2. Una solución para los Ejercicios

9.1. (Ejercicio 9.1) ***Solución.*** Sea $x \in A \times B$. Por definición de $A \times B$, sabemos que $x = (a, b)$, con $a \in A$ y $b \in B$. Por definición de par ordenado, podemos escribir $x = \{\, \{a\}; \{a, b\} \,\}$.

Como $a \in A$, en particular $a \in A \cup B$. Así, vemos rápidamente que $\{a\} \subseteq A \cup B$. De aquí, se obtiene que $\boxed{\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B)}$.

De igual forma, como $b \in B$, se sigue que $b \in A \cup B$. Como además $a \in A \cup B$, entonces $\{a, b\} \subseteq A \cup B$, de donde se obtiene que $\boxed{\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)}$.

De la misma forma, como $\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ y $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, entonces $x \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. De aquí se obtiene de inmediato que $x \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$. Por lo tanto, $A \times B \subseteq \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$. □

Ayudantía 10

Cardinalidad y su Operatoria

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

10.1. Definición y Axioma de Cardinalidad

El Cardinal de A se simboliza como $\mathcal{K}(A)$ y se asume como idea primitiva.

Axioma de Cardinalidad: $\boxed{\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B) \iff A \approx B}$

DEFINICIÓN 10.10. x es un (número) cardinal si y solo si existe un conjunto A tal que $\mathcal{K}(A) = x$.

Existencia de un número cardinal

Como A es un conjunto, si decimos que $\mathcal{K}(A) = x$, entonces por Definición 10.10 x ***sería*** un número cardinal, si existe. Pero la existencia del cardinal de **cualquier conjunto** es una **idea primitiva**, por lo que el acto de *definir* el cardinal de un conjunto como $\mathcal{K}(A) = x$ bastará de ahora en adelante para suponer su existencia.

Correspondencia entre Conjuntos y Cardinales

A partir de la Definición 10.10, vemos que a cada conjunto le corresponde un número cardinal. Sin embargo, ese cardinal podría no ser único para ese conjunto. Por ello, en cada ocasión habrá que demostrar que el cardinal del conjunto será único.

Al revés, dado un número cardinal, no es posible asociarlo con un único conjunto, sino que con una ***familia (o clase) de conjuntos*** que sean equipotentes entre sí (por Axioma de Cardinalidad). Así, preguntarse cuál es **EL** conjunto cuya cardinalidad es 2 no tiene sentido.

10.2. Suma de Cardinales

TEOREMA 10.53. *Existen A, B conjuntos tales que $A \cap B = \varnothing \ \wedge \ \mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n$.*

Demostración. En este caso, queremos probar la existencia de los conjuntos A y B que cumplen las condiciones dadas. Por la Definición 10.10, como m, n son cardinales, existen conjuntos A_1, B_1 tales que $\mathcal{K}(A_1) = m$ y $\mathcal{K}(B_1) = n$. Por el Teorema 4.9, a partir de A_1 y B_1 se puede obtener A, B tales que $A \approx A_1 \ \wedge \ B \approx B_1 \ \wedge \ \boxed{A \cap B = \varnothing}$. Finalmente, por el Axioma de Cardinalidad, de las equipotencias se obtiene $\boxed{\mathcal{K}(A) = m}$ y $\boxed{\mathcal{K}(B) = n}$. □

TEOREMA 10.54. *Existe un único cardinal p y existen A, B conjuntos que cumplen con $A \cap B = \varnothing \ \wedge \ \mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge \mathcal{K}(A \cup B) = p$.*

Demostración. Aquí debemos probar que el cardinal p que cumple las condiciones dadas es único. Como ya vimos, la existencia de p está garantizada por la existencia del conjunto $A \cup B$ (**Axioma de la Unión**) y porque $\mathcal{K}(A \cup B) = p$. En tanto, la existencia de los conjuntos A, B que cumplen las tres primeras condiciones está garantizada por el Teorema 10.53.

Entonces, para probar que p es único, suponemos que existe $p_0 \neq p$ y conjuntos A_1, B_1 tales que $A_1 \cap B_1 = \varnothing \ \wedge \ \mathcal{K}(A_1) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B_1) = n \ \wedge \mathcal{K}(A_1 \cup B_1) = p_0$.

Como $\mathcal{K}(A_1) = m = \mathcal{K}(A)$, por Axioma de Cardinalidad se sigue $A_1 \approx A$. Análogamente se obtiene $B_1 \approx B$. Como además $A \cap B = \varnothing$ y $A_1 \cap B_1 = \varnothing$, por Teorema 4.4 se obtiene $A \cup B \approx A_1 \cup B_1$.

Luego, por Axioma de Cardinalidad, $\mathcal{K}(A \cup B) = \mathcal{K}(A_1 \cup B_1)$, por lo que $p = p_0$. □

DEFINICIÓN 10.11. Decir que $\boxed{m+n=p}$ equivale a decir que existen conjuntos A, B tales que $A \cap B = \varnothing \ \wedge \ \mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge \mathcal{K}(A \cup B) = p$. Es decir:

$$\boxed{A \cap B = \varnothing \iff \mathcal{K}(A \cup B) = \mathcal{K}(A) + \mathcal{K}(B)}$$

TEOREMA 10.55. $m + n = n + m$

Demostración. Por Teorema 10.53, existen A, B tales que $A \cap B = \varnothing$ y $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$. Por Definición 10.11 se obtiene, respectivamente, que $\mathcal{K}(A \cup B) = m+n$ y que $\mathcal{K}(B \cup A) = n+m$.

Como $A \cup B = B \cup A$, por Teorema 4.1 se sigue $A \cup B \approx B \cup A$. Luego, por Axioma de Cardinalidad, $\mathcal{K}(A \cup B) = \mathcal{K}(B \cup A)$, de donde se obtiene $m + n = n + m$. □

TEOREMA 10.56. $(m + n) + p = m + (n + p)$

Demostración. Por Teorema 10.53, existen A, B tales que $A \cap B = \varnothing$ y $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$. Por Definición 10.11 se obtiene que $\mathcal{K}(A \cup B) = m + n$.

Para agregar al conjunto C, también por Teorema 10.53, existen B, C tales que $B \cap C = \varnothing$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(C) = p$. Por Definición 10.11 se obtiene que $\mathcal{K}(B \cup C) = n + p$.

Siguiendo el mismo argumento, por Teorema 10.53, existen $A \cup B, C$ tales que $(A \cup B) \cap B = \varnothing$ y $\mathcal{K}(A \cup B) = m + n$ y $\mathcal{K}(C) = p$. Por Definición 10.11 se obtiene que $\mathcal{K}[(A \cup B) \cup C] = (m + n) + p$.

De igual forma, por Teorema 10.53, existen $A, B \cup C$ tales que $A \cap (B \cup C) = \varnothing$ y $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B \cup C) = n + p$. Por Definición 10.11 se obtiene que $\mathcal{K}[A \cup (B \cup C)] = m + (n + p)$.

Como $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, por Teorema 4.1 se sigue $(A \cup B) \cup C \approx A \cup (B \cup C)$. Luego, por Axioma de Cardinalidad, $\mathcal{K}[(A \cup B) \cup C] = \mathcal{K}[A \cup (B \cup C)]$, de donde se obtiene $(m + n) + p = m + (n + p)$. □

DEFINICIÓN 10.12. $0 = \mathcal{K}(\varnothing)$; $1 = \mathcal{K}(\{\varnothing\})$; $2 = \mathcal{K}(\{\varnothing; \{\varnothing\}\})$

TEOREMA 10.57. $m + 0 = m$

Demostración. Por Definición 10.12 sabemos que $\mathcal{K}(\varnothing) = 0$ y definimos $\mathcal{K}(A) = m$.

Primero, notamos que $A \cup \varnothing = A$. Por Teorema 4.1 se sigue que $A \cup \varnothing \approx A$. Luego, por Axioma de Cardinalidad, se obtiene que $\mathcal{K}(A \cup \varnothing) = \mathcal{K}(A) = m$. Además, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Así, existen A y $B = \varnothing$ tales que $A \cap \varnothing = \varnothing$, con $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(\varnothing) = 0 \ \wedge \ \mathcal{K}(A \cup \varnothing) = m$. Finalmente, por Definición 10.11 se concluye que $m + 0 = m$. □

10.3. Producto de Cardinales

TEOREMA 10.58. *Existe un único cardinal p y existen A, B conjuntos que cumplen con* $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge \mathcal{K}(A \times B) = p$

Demostración. Aquí debemos probar que el cardinal p que cumple las condiciones dadas es único. Como ya vimos, la existencia de p está garantizada por la existencia del conjunto $A \times B$ y porque $\mathcal{K}(A \times B) = p$. En tanto, la existencia de los conjuntos A, B que cumplen las dos primeras condiciones está garantizada por la **idea primitiva**.

Así, para probar que p es único, suponemos que existe $p_0 \neq p$ y conjuntos A_1, B_1 tales que $\mathcal{K}(A_1) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B_1) = n \ \wedge \mathcal{K}(A_1 \times B_1) = p_0$. Como $\mathcal{K}(A_1) = m = \mathcal{K}(A)$, por Axioma de Cardinalidad se sigue $A_1 \approx A$. Análogamente se obtiene $B_1 \approx B$. Luego, por Teorema 4.5 se obtiene $A \times B \approx A_1 \times B_1$. Luego, por Axioma de Cardinalidad, $\mathcal{K}(A \times B) = \mathcal{K}(A_1 \times B_1)$, por lo que $p = p_0$. □

DEFINICIÓN 10.13. Decir $\boxed{m \cdot n = p}$ equivale a decir que existen conjuntos A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge \mathcal{K}(A \times B) = p$. Es decir: $\boxed{\mathcal{K}(A \times B) = \mathcal{K}(A) \cdot \mathcal{K}(B)}$.

TEOREMA 10.59. $m \cdot n = n \cdot m$

Demostración. Por Definición 10.13, existen A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(A \times B) = m \cdot n$. Análogamente, se obtiene que $\mathcal{K}(B \times A) = n \cdot m$. Por Teorema 4.6 se tiene $A \times B \approx B \times A$. Luego, por Axioma de Cardinalidad, $\mathcal{K}(A \times B) = \mathcal{K}(B \times A)$, de donde se obtiene $m \cdot n = n \cdot m$. □

TEOREMA 10.60. $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

Demostración. Por Definición 10.13, existen A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(A \times B) = m \cdot n$. Para agregar al conjunto C, también por Definición 10.13, existen B, C tales que $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\mathcal{K}(B \times C) = n + p$. De igual forma, existen $A \times B, C$ tales que $\mathcal{K}(A \times B) = m \cdot n$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\mathcal{K}[(A \times B) \times C] = (m \cdot n) \cdot p$. De nuevo, existen $A, B \times C$ tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B \times C) = n \cdot p$ y $\mathcal{K}[A \times (B \times C)] = m \cdot (n \cdot p)$. Así, por Teorema 4.7 se sigue $(A \times B) \times C \approx A \times (B \times C)$. Luego, por Axioma de Cardinalidad, $\mathcal{K}[(A \times B) \times C] = \mathcal{K}[A \times (B \times C)]$, de donde se obtiene $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$. □

TEOREMA 10.61. $m \cdot 1 = m$

Demostración. Por Definición 10.12 sabemos que $\mathcal{K}(\{\varnothing\}) = 1$ y definimos $\mathcal{K}(A) = m$.

Por Teorema 4.8 se tiene $A \times \{\varnothing\} \approx A$. Luego, por Axioma de Cardinalidad, se obtiene que $\mathcal{K}(A \times \{\varnothing\}) = \mathcal{K}(A) = m$.

Así, existen A y $B = \{\varnothing\}$ tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(\{\varnothing\}) = 1 \ \wedge \ \mathcal{K}(A \times \{\varnothing\}) = m$. Finalmente, por Definición 10.13 se concluye que $m \cdot 1 = m$. □

TEOREMA 10.62. $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$

Demostración. Por Teorema 10.53, existen B, C tales que $B \cap C = \varnothing$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(C) = p$. Por Definición 10.11 se obtiene que $\mathcal{K}(B \cup C) = n + p$. Por Definición 10.13, existen A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(A \times B) = m \cdot n$. También existen A, C tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\mathcal{K}(A \times C) = m \cdot p$.

Para obtener el cardinal del lado izquierdo, por Definición 10.13, existen $A, B \cup C$ tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B \cup C) = n + p$ y $\boxed{\mathcal{K}[A \times (B \cup C)] = m \cdot (n + p)}$.

Mientras que para el cardinal del lado derecho, se tiene $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$. Por Contradicción, si suponemos que $(A \times B) \cap (A \times C) \neq \varnothing$, entonces existe $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Por definición de intersección y de par ordenado, esto implica que $x \in A \ \wedge \ y \in B \ \wedge \ y \in C$. Así, $y \in B \cap C$, por lo que $B \cap C \neq \varnothing$ (lo que ya sabemos es falso). Así, $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$.

Luego, por Teorema 10.53, existen $A \times B, A \times C$ tales que $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$ y $\mathcal{K}(A \times B) = m \cdot n$ y $\mathcal{K}(A \times C) = m \cdot p$. Por Definición 10.11 se obtiene que:

$\boxed{\mathcal{K}[(A \times B) \cup (A \times C)] = m \cdot n + m \cdot p}$.

En el Ejercicio 4.2 vimos que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; luego, por Teorema 4.1, se obtiene $A \times (B \cup C) \approx (A \times B) \cup (A \times C)$. Así, por Axioma de Cardinalidad se obtiene que $\mathcal{K}[A \times (B \cup C)] = \mathcal{K}[(A \times B) \cup (A \times C)]$, de donde se concluye lo pedido. □

10.4. Exponenciación de Cardinales

TEOREMA 10.63. *Existe un único cardinal p y existen A, B conjuntos que cumplen con* $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge \mathcal{K}(A^B) = p$

Demostración. Aquí debemos probar que el cardinal p que cumple las condiciones dadas es único. Como ya vimos, la existencia de p está garantizada por la existencia del conjunto A^B y porque $\mathcal{K}(A^B) = p$. En tanto, la existencia de los conjuntos A, B que cumplen las dos primeras condiciones está garantizada por la **idea primitiva**.

Entonces, para probar que p es único, suponemos que existe $p_0 \neq p$ y conjuntos A_1, B_1 tales que $\mathcal{K}(A_1) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B_1) = n \ \wedge \mathcal{K}({A_1}^{B_1}) = p_0$. Como $\mathcal{K}(A_1) = m = \mathcal{K}(A)$, por Axioma de Cardinalidad se sigue $A_1 \approx A$. Análogamente se obtiene $B_1 \approx B$. Luego, por Teorema 5.10 se obtiene $A^B \approx {A_1}^{B_1}$.

Luego, por Axioma de Cardinalidad, $\mathcal{K}(A^B) = \mathcal{K}({A_1}^{B_1})$, por lo que $p = p_0$. □

DEFINICIÓN 10.14. Decir $\boxed{m^n = p}$ significa que existen conjuntos A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge \mathcal{K}(A^B) = p$. Es decir: $\boxed{\mathcal{K}(A^B) = \mathcal{K}(A)^{\mathcal{K}(B)}}$.

TEOREMA 10.64. $m^{n+p} = m^n \cdot m^p$

Demostración. Por Teorema 10.53, existen B, C tales que $\boxed{B \cap C = \varnothing}$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(C) = p$. Por Definición 10.11 se obtiene que $\mathcal{K}(B \cup C) = n + p$. Por Definición 10.14, existen A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(A^B) = m^n$. También existen A, C tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\mathcal{K}(A^C) = m^p$.

Para obtener el cardinal izquierdo, por Definición 10.14, existen $A, B \cup C$ tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B \cup C) = n+p$ y $\boxed{\mathcal{K}(A^{B\cup C}) = m^{n+p}}$. Mientras que para el cardinal del lado derecho, por Definición 10.13, existen A^B, A^C tales que $\mathcal{K}(A^B) = m^n$ y $\mathcal{K}(A^C) = m^p$ y $\boxed{\mathcal{K}(A^B \times A^C) = m^n \cdot m^p}$.

Como $B \cap C = \varnothing$, por Teorema 5.11, se obtiene $A^{B\cup C} \approx A^B \times A^C$. Así, por Axioma de Cardinalidad se obtiene que $\mathcal{K}(A^{B\cup C}) = \mathcal{K}(A^B \times A^C)$, de donde se concluye lo pedido. □

TEOREMA 10.65. $(m \cdot n)^p = m^p \cdot n^p$

Demostración. Por Definición 10.13, existen A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(A \times B) = m \cdot n$. Por Definición 10.14, existen $A \times B, C$ tales que $\mathcal{K}(A \times B) = m \cdot n$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\boxed{\mathcal{K}[(A \times B)^C] = (m \cdot n)^p}$. También por Definición 10.14, existen A, C tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\mathcal{K}(A^C) = m^p$. Nuevamente por Definición 10.14, existen B, C tales que $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\mathcal{K}(B^C) = n^p$.

Por último, por Definición 10.13, existen A^C, B^C tales que $\mathcal{K}(A^C) = m^p$ y $\mathcal{K}(B^C) = n^p$, cumpliéndose que $\boxed{\mathcal{K}(A^C \times B^C) = m^p \cdot n^p}$. Por Teorema 5.12, se obtiene $(A\times B)^C \approx A^C \times B^C$. Así, por Axioma de Cardinalidad se obtiene que $\mathcal{K}[(A \times B)^C)] = \mathcal{K}(A^B \times A^C)$, obteniendo lo pedido. □

TEOREMA 10.66. $(m^n)^p = m^{n\cdot p}$

Demostración. Por Definición 10.14, existen A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(A^B) = m^n$. Por Definición 10.14, existen A^B, C tales que $\mathcal{K}(A^B) = m^n$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\boxed{\mathcal{K}[(A^B)^C] = (m^n)^p}$

Por Definición 10.13, existen B, C tales que $\mathcal{K}(B) = n$ y $\mathcal{K}(C) = p$ y $\mathcal{K}(B \times C) = n \cdot p$. Nuevamente por Definición 10.14, existen $A, B \times C$ tales que $\mathcal{K}(A) = m$ y $\mathcal{K}(B \times C) = n \cdot p$ y $\mathcal{K}(A^{B\times C}) = m^{n\cdot p}$.

Por Teorema 5.13, se obtiene $(A^B)^C \approx A^{B\times C}$. Así, por Axioma de Cardinalidad se obtiene que $\mathcal{K}[(A^B)^C)] = \mathcal{K}(A^{B\times C})$, de donde se concluye lo pedido. □

TEOREMA 10.67. $m^1 = m$

Demostración. Definimos $m = \mathcal{K}(A)$ y por Definición 10.12 tenemos $1 = \mathcal{K}(\{\varnothing\})$. Usando la Definición 10.14, obtenemos que $m^1 = \mathcal{K}(A^{\{\varnothing\}})$. Debemos demostrar que $A^{\{\varnothing\}} \approx A$.

Considerando que por Ejercicio 5.4 $A^{\{\varnothing\}} = \{\ \{(\varnothing, y)\}, y \in A\ \}$, basta con establecer una función $f\colon A \to A^{\{\varnothing\}}$ tal que $f(y) = \{(\varnothing, y)\}$.

Esta función es inyectiva, pues para $y_1, y_2 \in A$ se cumple:

$$\boxed{f(y_1) = f(y_2)} \Longrightarrow \{(\varnothing, y_1)\} = \{(\varnothing, y_2)\} \Longrightarrow (\varnothing, y_1) = (\varnothing, y_2) \Longrightarrow \varnothing = \varnothing \wedge y_1 = y_2 \Longrightarrow \boxed{y_1 = y_2}$$

Mientras que para $\{(\varnothing, y)\} \in A^{\{\varnothing\}}$ es inmediato que existe $y \in A$ tal que $\{(\varnothing, y)\} = f(y)$. Así, se cumple que $A^{\{\varnothing\}} \approx A$, de donde $\mathcal{K}(A^{\{\varnothing\}}) = \mathcal{K}(A)$ y se obtiene $m^1 = m$. □

TEOREMA 10.68. $m^0 = 1$

Demostración. Definimos $m = \mathcal{K}(A)$ y por Definición 10.12 tenemos $0 = \mathcal{K}(\varnothing)$ y $1 = \mathcal{K}(\{\varnothing\})$. Usando la Definición 10.14, obtenemos que $m^0 = \mathcal{K}(A^{\varnothing})$. Por Ejercicio 5.1 sabemos que $A^{\varnothing} = \{\varnothing\}$ de donde por Teorema 6.15 se sigue que $A^{\varnothing} \approx \{\varnothing\}$, de donde $\mathcal{K}(A^{\varnothing}) = \mathcal{K}(\{\varnothing\})$ y se obtiene $m^0 = 1$. □

TEOREMA 10.69. *Si* $m \neq 0$, *entonces* $0^m = 0$

Demostración. Definimos $m = \mathcal{K}(A)$ y por Definición 10.12 tenemos $0 = \mathcal{K}(\varnothing)$. De la hipótesis $m \neq 0$ se deduce inmediatamente que $A \neq \varnothing$ (pues $A \not\approx \varnothing$ implica que $A \prec \varnothing$ o bien $\varnothing \prec A$, y la primera opción es imposible; además, $\varnothing$ es el único conjunto sin elementos).

Usando la Definición 10.14, obtenemos que $0^m = \mathcal{K}(\varnothing^A)$. Por Ejercicio 5.2 sabemos que $\varnothing^A = \varnothing$ de donde por Teorema 6.15 se sigue que $\varnothing^A \approx \varnothing$, de donde $\mathcal{K}(\varnothing^A) = \mathcal{K}(\varnothing)$ y se obtiene $0^m = 0$. □

10.4.1. Ejercicios Propuestos

10.1. (Solución 10.1) **Usando el Axioma de Cardinalidad, demostrar que la igualdad de cardinales es una relación de equivalencia**.

10.2. (Solución 10.2) **Demostrar que para m, n, p cardinales se cumple:**

$$m = n \iff m \cdot p = n \cdot p$$

10.3. (Solución 10.3) **Demostrar que $m \cdot 0 = 0$.**

10.4. (Solución 10.4) **Demostrar que para m, n, p cardinales se cumple:**

$$m = n \iff m + p = n + p$$

10.4.2. Una solución para los Ejercicios Propuestos

10.1. (Ejercicio 10.1) ***Solución.*** La igualdad de cardinales es refleja, simétrica y transitiva, debido a que la equipotencia de los conjuntos apropiados también es refleja, simétrica y transitiva (definiendo las cardinalidades y usando Axioma de Cardinalidad, Teorema 4.1, Teorema 4.2 y Teorema 4.3 de Equipotencia, respectivamente). □

10.2. (Ejercicio 10.2) ***Solución.*** Sean $m = \mathcal{K}(A), n = \mathcal{K}(B), p = \mathcal{K}(C)$.

Por Ejercicio 4.6 se tiene $A \approx B \iff A \times C \approx B \times C$. Aplicando el Axioma de Cardinalidad en ambos lados de la equivalencia, se obtiene $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B) \iff \mathcal{K}(A \times C) = \mathcal{K}(B \times C)$.

Aplicando la Definición 10.13 en el lado derecho de la equivalencia, se obtiene $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B) \iff \mathcal{K}(A) \cdot \mathcal{K}(C) = \mathcal{K}(B) \cdot \mathcal{K}(C)$. Por lo tanto, $m = n \iff m \cdot p = n \cdot p$. □

10.3. (Ejercicio 10.3) ***Solución.*** Como $A \times \varnothing = \varnothing$, en particular $A \times \varnothing \approx \varnothing$. Luego, por Axioma de Cardinalidad se obtiene $\mathcal{K}(A) \cdot \mathcal{K}(\varnothing) = \mathcal{K}(\varnothing)$. Definiendo $\mathcal{K}(A) = m$ y como $\mathcal{K}(\varnothing) = 0$, se obtiene lo pedido. □

10.4. (Ejercicio 10.4) ***Solución.*** Definimos $m = \mathcal{K}(A)$, $n = \mathcal{K}(B)$ y $p = \mathcal{K}(C)$.
Asimismo, definimos $m + p = \mathcal{K}(A \cup C)$ y $n + p = \mathcal{K}(B \cup C)$.
Además, $A \cap C = \varnothing$ y $B \cap C = \varnothing$. Notamos que $C \approx C$.

Con todos estos elementos, se satisface por Teorema 4.4 que $A \approx B \iff A \cup C \approx B \cup C$. De allí se obtiene de inmediato por Axioma de Cardinalidad que $m = n \iff m + p = n + p$. □

Ayudantía 11

Orden entre Cardinales y Cardinales Finitos

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

11.1. Orden parcial entre cardinales

DEFINICIÓN 11.15. Decir que $\boxed{m \leqslant n}$ equivale a decir que existen conjuntos A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge A \lesssim B$.

TEOREMA 11.70. $m \leqslant n$ *si y solo si* $(\forall A)(\forall B)[\, \mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \implies A \lesssim B \,]$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Suponemos primero que $m \leqslant n$. Por Definición 11.15, existen A_1 y B_1 tales que $\mathcal{K}(A_1) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B_1) = n \ \wedge A_1 \lesssim B_1$. Queremos demostrar que **TODO** par de conjuntos A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n$ debe cumplir con $A \lesssim B$.

Por Contradicción, suponer que existen A_2, B_2 tales que $\mathcal{K}(A_2) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B_2) = n$ pero $\sim (A_2 \lesssim B_2)$. Por Tricotomía (Teorema 9.44), solamente puede ocurrir que $B_2 \prec A_2$. Luego, por Definición 6.4, se sigue que $B_2 \lesssim A_2$, sin olvidar que $\sim (B_2 \approx A_2)$.

Por Definición 11.15 sobre A_2 y B_2, se obtiene que $n \leqslant m$ (hasta aquí todavía podría ocurrir que $n = m$). Por Axioma de Cardinalidad, como $\sim (B_2 \approx A_2)$, se obtiene que $m \neq n$. Así, se contradice completamente que $m \leqslant n$. Por lo tanto, con las condiciones iniciales, se concluye que $A \lesssim B$.

($\Longleftarrow$) Suponemos ahora que para todo par de conjuntos A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n$ se cumple que $A \lesssim B$. Como esto se cumple para **TODO** par de conjuntos, en particular se cumple para A_1, B_1. Luego, por Definición 11.15, se concluye de inmediato que $m \leqslant n$. □

TEOREMA 11.71. $m \leqslant m$

Demostración. Definimos $m = \mathcal{K}(A)$. Por Teorema 4.1 sabemos que $A \approx A$, mientras que por Teorema 6.15 se sigue que $A \lesssim A$. Luego, por Definición 11.15 se concluye que $m \leqslant m$. □

TEOREMA 11.72. $m \leqslant n \ \wedge n \leqslant p \implies m \leqslant p$

Demostración. Definimos $m = \mathcal{K}(A)$, $n = \mathcal{K}(B)$ y $p = \mathcal{K}(C)$. Por Definición 11.15 se sabe $A \lesssim B$ y $B \lesssim C$; por Teorema 6.17 sigue $A \lesssim C$. Así, por Definición 11.15 se concluye que $m \leqslant p$. □

TEOREMA 11.73. $m \leqslant n \ \wedge n \leqslant m \implies m = n$

Demostración. Definimos $m = \mathcal{K}(A)$ y $n = \mathcal{K}(B)$. Por Definición 11.15 se sabe $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$; por Teorema 6.18 se sigue que $A \approx B$. Así, por Axioma de Cardinalidad se concluye que $m = n$. □

TEOREMA 11.74. *Para la relación* $\leqslant$ *se cumple:*

74A. $m \leqslant n \wedge m' \leqslant n' \Rightarrow m + m' \leqslant n + n'$

74B. $m \leqslant n \ \wedge \ m' \leqslant n' \implies m \cdot m' \leqslant n \cdot n'$

74C. $m \leqslant n \ \wedge \ m' \leqslant n' \implies m^{m'} \leqslant n^{n'}$

***Demostración.* 74A.** Definimos primero a los cardinales involucrados: $m = \mathcal{K}(A)$, $n = \mathcal{K}(B)$, $m' = \mathcal{K}(C)$, $n' = \mathcal{K}(D)$. Mientras que los cardinales del lado derecho se definen como $m + m' = \mathcal{K}(A \cup C)$, $n + n' = \mathcal{K}(B \cup D)$ y se cumple además que $A \cap C = \varnothing$ y que $B \cap D = \varnothing$.

De las hipótesis se deduce por Definición 11.15 que $A \precsim B \ \wedge \ C \precsim D$, de donde sigue por Teorema 6.19A. que $A \cup C \precsim B \cup D$, lo que permite concluir por Definición 11.15 que $m + m' \leqslant n + n'$. □

***Demostración.* 74B.** Definimos primero a los cardinales involucrados: $m = \mathcal{K}(A)$, $n = \mathcal{K}(B)$, $m' = \mathcal{K}(C)$, $n' = \mathcal{K}(D)$. Mientras que los cardinales del lado derecho serán $m \cdot m' = \mathcal{K}(A \times C)$ y $n \cdot n' = \mathcal{K}(B \times D)$.

De las hipótesis se deduce por Definición 11.15 que $A \precsim B \ \wedge \ C \precsim D$, de donde sigue por Teorema 6.19B. que $A \times C \precsim B \times D$, lo que permite concluir por Definición 11.15 que $m \cdot m' \leqslant n \cdot n'$. □

***Demostración.* 74C.** Definimos primero a los cardinales involucrados: $m = \mathcal{K}(A)$, $n = \mathcal{K}(B)$, $m' = \mathcal{K}(C)$, $n' = \mathcal{K}(D)$. Mientras que los cardinales del lado derecho serán $m^{m'} = \mathcal{K}(A^C)$ y $n^{n'} = \mathcal{K}(B^D)$.

De las hipótesis se deduce por Definición 11.15 que $A \precsim B \ \wedge \ C \precsim D$, de donde sigue por Teorema 6.19C. que $A^C \precsim B^D$, lo que permite concluir por Definición 11.15 que $m^{m'} \leqslant n^{n'}$. □

TEOREMA 11.75. $m \leqslant m + n$

Demostración. Definimos primero a los cardinales involucrados: $m = \mathcal{K}(A)$, $n = \mathcal{K}(B)$, $m + n = \mathcal{K}(A \cup B)$ y $A \cap B = \varnothing$. Del Teorema 6.20 sigue $A \precsim A \cup B$ y por Definición 11.15 se concluye $m \leqslant m + n$. □

11.2. Orden Estricto entre Cardinales

DEFINICIÓN 11.16. $\boxed{m < n \iff m \leqslant n \ \wedge \ m \neq n}$

TEOREMA 11.76. *$m < n$ si y solo si existen A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge \ A \prec B$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Suponemos primero que $m < n$. Por Definición 11.16, se sabe que $m \leqslant n \ \wedge m \neq n$. Por Definición 11.15, existen A y B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n \ \wedge A \precsim B$.

Nos falta demostrar que $\sim (B \precsim A)$ para obtener que $A \prec B$. Por Contradicción, suponer que $B \precsim A$. Por Teorema 6.18 se obtiene $A \approx B$, lo que implicaría por Axioma de Cardinalidad que $m = n$, lo que contradice que $m \neq n$. Por lo tanto, $A \prec B$

($\Longleftarrow$) Suponemos ahora que existen conjuntos A, B tales que $\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \ \mathcal{K}(B) = n$ y $A \prec B$. Por Definición 6.4, esto implica que $A \precsim B \wedge \ \sim (B \precsim A)$. De la primera afirmación se sigue por Definición 11.15 que $m \leqslant n$, mientras que de la segunda afirmación se sigue por Contrapositivo del Teorema 6.15 que $\sim (B \approx A)$; luego, por Axioma de Cardinalidad se obtiene $n \neq m$. A partir de $m \leqslant n \wedge m \neq n$, por Definición 11.16 se concluye lo pedido. □

TEOREMA 11.77. *Para la relación $<$ se cumple:*

77A. $\sim (m < m)$

77B. $(m < n) \implies \sim (n < m)$

77C. $m < n \ \wedge \ n < p \implies m < p$

***Demostración.* 77A.** Definimos $m = \mathcal{K}(A)$. Por Teorema 6.21A. sabemos que $\sim (A \prec A)$. Esto implica por Teorema 9.44 que $A \approx A$, de donde por Axioma de Cardinalidad se obtiene $m = m$. Luego, no se cumple el lado derecho de la Definición 11.16, por lo que $\sim (m < m)$. □

***Demostración.* 77B.** Definimos $m = \mathcal{K}(A)$ y $n = \mathcal{K}(B)$. De la hipótesis se obtiene por Teorema 11.76 que $A \prec B$, de donde por Teorema 6.21B. se obtiene $\sim (B \prec A)$.

Ahora, supongamos por Contradicción que $n < m$. Esto implicaría por Teorema 11.76 que $B \prec A$, lo que contradice que $\sim (B \prec A)$. Por lo tanto, $\sim (n < m)$. □

***Demostración.* 77C.** Definimos $m = \mathcal{K}(A)$, $n = \mathcal{K}(B)$ y $p = \mathcal{K}(C)$. De la hipótesis se obtiene por Teorema 11.76 que $A \prec B \ \wedge B \prec C$, de donde por Teorema 6.21C. se obtiene $A \prec C$. Finalmente, por Teorema 11.76 se concluye que $m < p$. □

TEOREMA 11.78. $m < 2^m$

Demostración. Definimos $m = \mathcal{K}(A)$ y de la Definición 10.12 se obtiene $2 = \mathcal{K}(\{\ \varnothing; \{\varnothing\}\ \})$. Con ello, por Definición 10.14 se obtiene $2^A = \mathcal{K}(\{\ \varnothing; \{\varnothing\}\ \}^A)$. Por Teorema 5.14 sabemos que $\{\ \varnothing; \{\varnothing\}\ \}^A \approx \mathcal{P}(A)$, mientras que por Teorema 6.23 sabemos que $A \prec \mathcal{P}(A)$. Así, por Teorema 6.21C. se sigue que $A < 2^A$. Luego, por Teorema 11.76 se concluye que $m < 2^m$. □

TEOREMA 11.79. *Para todo m existe n tal que $m < n$.*

Demostración. Por Contradicción, supongamos que existe m tal que para todo n se tiene $n \leqslant m$ (en palabras simples, m sería el mayor de los cardinales). Definamos $m = \mathcal{K}(A)$. Si además definimos $n = \mathcal{K}[\mathcal{P}(A)]$, ya sabemos que $m < n$, lo que contradice nuestra hipótesis y demuestra lo pedido. □

11.3. Sucesor y Antecesor de un cardinal

DEFINICIÓN 11.17. $m^+ = n \iff (\exists A) : (\mathcal{K}(A) = m \ \wedge \mathcal{K}(A \cup \{A\}) = n$

TEOREMA 11.80. ***(AXIOMA 4 DE PEANO)*** $(m^+ = n^+) \implies m = n$

Demostración. Para m^+ se obtiene de la Definición 11.17 que existe A tal que $\mathcal{K}(A) = m$ y que $\mathcal{K}(A \cup \{A\}) = m^+$. De forma análoga, para n^+ se obtiene de la Definición 11.17 que existe B tal que $\mathcal{K}(B) = n$ y que $\mathcal{K}(B \cup \{B\}) = n^+$.

De la hipótesis se sabe que $m^+ = n^+$, o bien $\mathcal{K}(A \cup \{A\}) = \mathcal{K}(B \cup \{B\})$. Esto implica por Axioma de Cardinalidad que $A \cup \{A\} \approx B \cup \{B\}$. A partir del Ejercicio 11.5, Ejercicio 11.6 y Ejercicio 11.7, se obtiene $A \approx B$.

Finalmente, por Axioma de Cardinalidad, se concluye que $m = n$. □

TEOREMA 11.81. $(m^+ = m + 1)$

Demostración. Para m^+ se obtiene de la Definición 11.17 que existe A tal que $\mathcal{K}(A) = m$ y que $\mathcal{K}(A \cup \{A\}) = m^+$. Mientras que por Definición 10.12 se tiene $1 = \mathcal{K}(\{\varnothing\})$.

Por otra parte, a partir del Ejercicio 5.4 vemos que $\{A\}^{\{\varnothing\}} = \{(\varnothing, A)\}$, lo que demuestra automáticamente que $\{A\} \approx \{\varnothing\}$. Es decir, $\mathcal{K}(\{A\}) = 1$.

Ahora debemos demostrar que $A \cap \{A\} = \varnothing$. Suponemos por Contradicción que existe $a \in A \cap \{A\}$. Ello implica que $a \in A$ y que $a \in \{A\}$. De la segunda afirmación, se obtiene de inmediato que $a = A$, mientras que de la primera afirmación obtenemos que $A \in A$. Esto es una Contradicción en virtud de la Paradoja de Russell y el Esquema Axiomático de Separación.

Así, por Definición 10.11, $\mathcal{K}(A \cup \{A\}) = \mathcal{K}(A) + \mathcal{K}(\{A\})$, o mejor dicho, que $m^+ = m + 1$. □

TEOREMA 11.82. *NO existe n tal que $m < n < m^+$.*

Demostración. Si bien esta demostración está escrita explícitamente en el libro de Suppes, no he logrado descifrarla para su adecuada comprensión. Por ello, y hasta nuevo aviso, la asumiremos sin demostración. □

DEFINICIÓN 11.18. $A(m) = \{\ n\ :\ n < m\}$. Ej: $A(0) = \varnothing$ y $A(1) = \{0\}$.

11.4. Cardinales finitos

DEFINICIÓN 11.19. x es cardinal finito si y sólo si $\mathcal{K}(A) = x$ y A es finito.

TEOREMA 11.83. ***(AXIOMA 1 DE PEANO)*** *0 es cardinal finito.*

Demostración. Directa ya que $0 = \mathcal{K}(\varnothing)$ (Definición 10.12) y que $\varnothing$ es finito (Teorema 8.24). □

TEOREMA 11.84. ***(AXIOMA 2 DE PEANO)***

Si m es cardinal finito, entonces m^+ es cardinal finito.

Demostración. Definiendo $m = \mathcal{K}(A)$, de la hipótesis se tiene que A es finito. Luego, como $\{A\} \approx \{\varnothing\}$ y $\{\varnothing\}$ es finito, entonces $\{A\}$ es finito. Luego, por Teorema 8.28 se sigue que $A \cup \{A\}$ es finito, por lo que $m^+ = \mathcal{K}(A \cup \{A\})$ es cardinal finito. □

TEOREMA 11.85. ***(AXIOMA 3 DE PEANO)*** *No existe m cardinal finito tal que $m^+ = 0$.*

Demostración. Por Contradicción, supongamos que existe $m = \mathcal{K}(A)$ tal que $m^+ = 0$. Esto implicaría que $A \cup \{A\} = \varnothing$, lo que deriva en que $A = \varnothing$ y $\{A\} = \varnothing$; la segunda afirmación es absurda, pues significaría que A no existe. Con ello, se demuestra lo pedido. □

TEOREMA 11.86. ***(AXIOMA 5 DE PEANO)***

Si m es cardinal finito y para una propiedad $\phi(m)$ se cumple:

86A. $\phi(0)$

86B. $(\forall m)(\phi(m) \implies \phi(m+1))$

Entonces $(\forall m)[\phi(m)]$.

Demostración. Supongamos por Contradicción que existe m' cardinal finito tal que se cumple **86A.** y **86B.** pero $\sim [\phi(m')]$. Gracias a la Definición 11.18, tenemos el conjunto $A(m')$. En este conjunto debe existir algún m'' tal que $m'' + 1 = m'$. Con esto último, por Contrapositivo de **86B.** se obtendría que $\sim [\phi(m'')]$.

Repitiendo el proceso una cantidad finita de veces, llegaremos a dar con los cardinales finitos 0 y 1, con $0 < 1$ (pues $\varnothing \prec \{\varnothing\}$). Habiendo obtenido previamente $\sim [\phi(1)]$, se obtendría $\sim [\phi(0)]$, lo que contradice **86A.** Así, se contradicen las hipótesis iniciales, por lo que se concluye que $\forall m[\phi(m)]$. □

11.4.1. Ejercicios Propuestos

11.1. (Solución 11.1) **Demostrar que para m, n, p cardinales con $p \neq 0$, se cumple:**

$$m < n \iff m \cdot p < n \cdot p$$

11.2. (Solución 11.2) **Demostrar que** $(\forall m)(0 \leqslant m)$.

11.3. (Solución 11.3) **Demostrar que** $m \cdot n = 0 \iff m = 0 \vee n = 0$.

11.4. (Solución 11.4) **Demostrar que si $m + n = p$, entonces $m \leqslant p$.**

Dados los conjuntos A, B y los elementos y, z tales que $y \notin A$ y $z \notin B$.
Queremos demostrar que $A \cup \{y\} \approx B \cup \{z\} \implies A \approx B$.
A partir de la hipótesis, se tiene que $f : A \cup \{y\} \longrightarrow B \cup \{z\}$ es biyectiva. Ahora, resuelva lo siguiente:

11.5. (Solución 11.5) **Suponiendo que $f(y) = z$, demuestre que $A \approx B$.**
HINT: Defina una función $g_1 : A \longrightarrow B$ a partir de f "quitando" a y y a su imagen $f(y) = z$. La función resultante será biyectiva, pero debe explicar por qué.

11.6. (Solución 11.6) **Ahora suponemos que $f(y) = b_0 \neq z$ para algún $b_0 \in B$ y que $f(a_0) = z$ para algún $a_0 \in A$. Defina una función $g_2 : A \longrightarrow B$ candidata a biyección.**
HINT: A partir de f, defina primero una función h "quitando" a y y a su imagen $f(y) = b_0$. Luego, a partir de esa función h, defina la función g_2 "forzando" a que $g_2(a_0) = b_0$ (es decir, ahora quitamos a z del recorrido, reemplazándolo por b_0).

11.7. (Solución 11.7) **Demuestre que la función $g_2 : A \longrightarrow B$ definida previamente es biyectiva.**

NOTA: Con el Ejercicio 11.5, Ejercicio 11.6 y Ejercicio 11.7 se demuestra que $A \cup \{y\} \approx B \cup \{z\} \implies A \approx B$, sin importar cuál sea la función $f : A \cup \{y\} \longrightarrow B \cup \{z\}$ pero sin olvidar que debe ser biyectiva.

11.4.2. Una solución para los Ejercicios Propuestos

11.1. (Ejercicio 11.1) ***Solución.*** Sean $m = \mathcal{K}(A), n = \mathcal{K}(B), p = \mathcal{K}(C)$. Por Definición 11.16, $m < n$ equivale a $m \leqslant n \ \wedge \ m \neq n$. Por Definición 11.15 y Axioma de Cardinalidad, lo anterior equivale a $A \lesssim B \wedge \sim (A \approx B)$.

Primero, por Ejercicio 4.6, $\sim (A \approx B)$ equivale a $\sim (A \times C \approx B \times C)$. Por Ejercicio 6.3 sigue que $A \lesssim B$ equivale a $A \times C \lesssim B \times C$ Por Teorema 6.22D., los dos resultados equivalen a $\boxed{A \times C \prec B \times C}$. Aplicando el Teorema 11.76, esto equivale a $\mathcal{K}(A \times C) < \mathcal{K}(B \times C)$.

Aplicando la Definición 10.13 en ambos lados, se obtiene que $\mathcal{K}(A) \cdot \mathcal{K}(C) < \mathcal{K}(B) \cdot \mathcal{K}(C)$. Por lo tanto, $m < n \iff m \cdot p = n \cdot p$. □

11.2. (Ejercicio 11.2) ***Solución.*** Por Contradicción, suponemos que existe m tal que $m < 0$. Definiendo $\mathcal{K}(A) = m$ y recordando que $0 = \mathcal{K}(\varnothing)$, se obtiene $\mathcal{K}(A) < \mathcal{K}(\varnothing)$. Por Teorema 11.76 se obtiene $A \prec \varnothing$, lo que por Definición implica que $A \lesssim \varnothing$ y que $\sim (\varnothing \lesssim A)$. Esta última afirmación implica, por Contrapositivo del Teorema 6.16, que $\varnothing \nsubseteq A$, lo que sabemos es falso. Así, hemos demostrado lo pedido. □

11.3. (Ejercicio 11.3) ***Solución.*** ($\Longrightarrow$). Si $m = 0 \ \vee \ n = 0$, por Ejercicio 10.3 se concluye de inmediato que $m \cdot n = 0$.

($\Longleftarrow$) Por Contrapositivo, demostraremos que si $m \neq 0 \ \wedge \ n \neq 0$, se debe cumplir que $m \cdot n \neq 0$.

Por Ejercicio 11.2, $0 \leqslant m$. Como además $0 \neq m$, por Definición se obtiene $0 < m$. Como además $n \neq 0$, por Ejercicio 11.1 se sigue que $0 \cdot n < m \cdot n$, mientras que por Ejercicio 10.3 $0 \cdot n = 0$. Así, se obtiene que $0 < m \cdot n$. Por Definición, se obtiene en particular que $0 \neq m \cdot n$. □

11.4. (Ejercicio 11.4) ***Solución.*** Por la Definición 10.11, la hipótesis implica que $\mathcal{K}(A) = m$, $\mathcal{K}(B) = n$ y que $\mathcal{K}(A \cup B) = p$, con $A \cap B = \varnothing$. Por Teorema 6.20 sabemos que $A \lesssim A \cup B$ y por Definición 11.15 se obtiene $m \leqslant p$. □

11.5. (Ejercicio 11.5) ***Solución.*** En el caso $f(y) = z$, redefinimos la función $g : A \cup \{y\} \longrightarrow B \cup \{z\}$ como:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ z & \text{si } x = y \end{cases}$$

Con ello, basta con definir la función $g_1 : A \longrightarrow B$ tal que $g(x) = f(x)$ y ella es trivialmente biyectiva, pues f es biyectiva. □

11.6. (Ejercicio 11.6) ***Solución.*** Ahora, suponemos que $f(y) = b_0 \in B$ y que $z = f(a_0), a_0 \in A$. Considerando la primera igualdad, se define una función intermedia $h : A \longrightarrow (B \cup \{z\}) - \{b_0\}$ tal que $h(x) = f(x)$. Esta función es biyectiva, pues f es biyectiva. Ahora, reemplazamos z por b_0 en el codominio definiendo la función:

$$g_2 : A \longrightarrow B \ , \ g_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in A - \{a_0\} \\ b_0 & \text{si } x = a_0 \end{cases}$$

Esta función será nuestra candidata a biyección. □

11.7. (Ejercicio 11.7) ***Solución.*** Primero, veremos si la función g_2 es inyectiva:

- Sean $x_1, x_2 \in A - \{a_0\}$ tales que $g_2(x_1) = g_2(x_2)$. De allí se sigue que $h(x_1) = h(x_2)$, que sabemos que es inyectiva. Por ello, $x_1 = x_2$ y la función es inyectiva en este caso.
- Si $x_1 = x_2 = a_0$, se tiene que $g_2(x_1) = g_2(x_2) = b_0$, por lo que también es inyectiva en este caso.
- Si $x_1 \in A - \{a_0\}$ y $x_2 = a_0$, es inmediato que $x_1 \neq x_2$. Luego, $g_2(x_1) = h(x_1) \in (B \cup \{z\}) - \{b_0\}$, mientras que $g_2(x_2) = b_0$. Luego, es claro que $g_2(x_1) \neq g_2(x_2)$, por lo que la función es inyectiva también en este caso. El caso $x_1 = a_0$ y $x_2 \in A - \{a_0\}$ es análogo.

Ahora veremos si la función g_2 es sobreyectiva. Dado $b \in B$, puede ocurrir que $b = b_0$ o que $b \neq b_0$. En el primer caso, es evidente que $a_0 \in A$ es tal que $b_0 = g_2(a_0)$. Mientras que en el segundo caso, existe $x \in A - \{a_0\}$ tal que $b = h(x)$ (pues h es biyectiva), de donde $b = g_2(x)$. Así, siempre existe $a \in A$ tal que $b = g_2(a)$. Por lo tanto, la función g_2 es biyectiva. □

Ayudantía 12

Fracciones no negativas

Versión del día lunes 27 de junio de 2022 a las 14:21 (GMT -4)

12.1. Definición de fracción no negativa

Entenderemos, por simplicidad, que un número natural es un cardinal finito.

DEFINICIÓN 12.20. x es una fracción no negativa si y solo si:

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} - \{0\}) \ : \ [x = (m, n)]$$

DEFINICIÓN 12.21. Si $n \neq 0$, entonces: $\boxed{x = \dfrac{m}{n} = (m, n)}$

DEFINICIÓN 12.22. $\boxed{\mathbf{Fr} = \left\{ x \;\middle|\; (\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} - \{0\}) \ : \ x = \dfrac{m}{n} \right\}}$

12.2. Equivalencia de fracciones no negativas

DEFINICIÓN 12.23. La relación $\simeq_f$ se define en $\mathbf{Fr}$ como: $\boxed{\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1}$

TEOREMA 12.1. *$\simeq_f$ es una relación de equivalencia en $\mathbf{Fr}$.*

Demostración. Una relación de equivalencia debe ser refleja, simétrica y transitiva. Consideremos por Ejercicio 10.1 que la igualdad de cardinales es relación de equivalencia.

Así, para $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Fr}$ se tiene $m \cdot n = m \cdot n$. Luego, por Definición 12.23 se obtiene $\dfrac{m}{n} \simeq_f \dfrac{m}{n}$, por lo que $\simeq_f$ **es refleja**.

Ahora bien, si $\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2}$, por Definición 12.23 se obtiene que $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$. De allí se sigue $m_2 \cdot n_1 = m_1 \cdot n_2$, lo que implica por Definición 12.23 que $\dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1}{n_1}$. Por lo tanto, $\simeq_f$ **es simétrica**.

Por último, si $\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2} \ \wedge \ \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_3}{n_3}$, por Definición 12.23 se obtiene que $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_2$. En este punto, debemos encontrar una forma de "conectar" estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_2 && / \text{ Ejercicio 10.2} \\
\implies & (m_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = (m_2 \cdot n_1) \cdot n_3 \ \wedge \ (m_2 \cdot n_3) \cdot n_1 = (m_3 \cdot n_2) \cdot n_1 && / \text{ Teorema 10.60} \\
\implies & m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) = m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_3 \cdot n_1) = m_3 \cdot (n_2 \cdot n_1) && / \text{ Teorema 10.59} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) = m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) = m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \text{ Ejercicio 10.1} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) = m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \text{ Teorema 10.60} \\
\implies & (m_1 \cdot n_3) \cdot n_2 = (m_3 \cdot n_1) \cdot n_2 && / \text{ Ejercicio 10.2} \\
\implies & m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1
\end{aligned}$$

El resultado obtenido implica por Definición 12.23 que $\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_3}{n_3}$. Por lo tanto, $\simeq_f$ **es transitiva**. Finalmente, se concluye que $\simeq_f$ es una relación de equivalencia. □

TEOREMA 12.2. *Si* $\frac{m}{n} \in \mathbf{Fr}$ *y* $p \neq 0$*, entonces* $\frac{m}{n} \simeq_f \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$.

Demostración. Dados m, n, p, por Teorema 10.60 se sabe que $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.

Ahora, por Teorema 10.60 se sabe que $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.

Por otra parte, del Teorema 10.59 se sabe que $m \cdot (n \cdot p) = m \cdot (p \cdot n)$ y por Teorema 10.60 se sabe que $m \cdot (p \cdot n) = (m \cdot p) \cdot n$; luego, aplicando Transitividad varias veces se obtiene $\boxed{m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot p) \cdot n}$. Por Definición 12.23, se concluye que $\frac{m}{n} \simeq_f \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$. □

12.3. Orden parcial estricto de fracciones no negativas

DEFINICIÓN 12.24. La relación $<_f$ se define en $\mathbf{Fr}$ como: $\boxed{\frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1}$

TEOREMA 12.3. $<_f$ *es un orden parcial estricto en* $\mathbf{Fr}$

Demostración. Un **orden parcial estricto** es una relación R que cumple con ser:

- **Irrefleja:** $\sim (xRx)$.
- **Asimétrica:** $xRy \implies \sim (yRx)$
- **Transitiva**

Así, para $\frac{m}{n} \in \mathbf{Fr}$ por Teorema 11.77A. se tiene $\sim (m \cdot n < m \cdot n)$. Luego, por Definición 12.24 se obtiene $\sim \left(\frac{m}{n} <_f \frac{m}{n}\right)$, por lo que $<_f$ **es irrefleja**.

Ahora, si $\frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2}$, por Definición 12.24 se obtiene que $m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1$. Por Teorema 11.77B. se sigue $\sim (m_2 \cdot n_1 < m_1 \cdot n_2)$, y por Definición 12.24 que $\sim \left(\frac{m_2}{n_2} <_f \frac{m_1}{n_1}\right)$. Por lo tanto, $<_f$ **es asimétrica**.

Por último, si $\frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2} \wedge \frac{m_2}{n_2} <_f \frac{m_3}{n_3}$, por Definición 12.24 se obtiene que $m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \wedge m_2 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_2$. Nuevamente debemos encontrar una forma de "conectar" estas dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
& m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_2 && / \text{ Ejercicio 11.1} \\
\implies & (m_1 \cdot n_2) \cdot n_3 < (m_2 \cdot n_1) \cdot n_3 \ \wedge \ (m_2 \cdot n_3) \cdot n_1 < (m_3 \cdot n_2) \cdot n_1 && / \text{ Teorema 10.60} \\
\implies & m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) < m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_3 \cdot n_1) < m_3 \cdot (n_2 \cdot n_1) && / \text{ Teorema 10.59} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) < m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) < m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \text{ Teorema 11.77C.} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) < m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \text{ Teorema 10.60} \\
\implies & (m_1 \cdot n_3) \cdot n_2 < (m_3 \cdot n_1) \cdot n_2 && / \text{ Ejercicio 11.1} \\
\implies & m_1 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_1
\end{aligned}
$$

El resultado obtenido implica por Definición 12.24 que $\frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_3}{n_3}$, por lo que $<_f$ **es transitiva**. Finalmente, se concluye que $<_f$ es un orden parcial estricto. □

TEOREMA 12.4. *Si* $x, y \in \mathbf{Fr}$*, entonces* $x <_f y \ \vee \ x \simeq_f y \ \vee \ y <_f x$.

Demostración. Definiendo $x = \frac{m_1}{n_1}$ e $y = \frac{m_2}{n_2}$, la proposición a demostrar equivale a:

$$m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \ \vee \ m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \ \vee \ m_2 \cdot n_1 < m_1 \cdot n_2$$

Definiendo $\mathcal{K}(A) = m_1 \cdot n_2$ y $\mathcal{K}(B) = m_2 \cdot n_1$, la proposición a demostrar es equivalente a:

$$\mathcal{K}(A) < \mathcal{K}(B) \ \vee \ \mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B) \ \vee \ \mathcal{K}(B) < \mathcal{K}(A)$$

A partir del Teorema 11.76 y del Axioma de Cardinalidad, esto equivale a demostrar que:

$$A \prec B \ \vee \ A \approx B \ \vee \ B \prec A$$

Entendiendo siempre que los números naturales involucrados son cardinales finitos, eso significa que A es finito, por lo que la última proposición corresponde al Teorema 9.44. □

DEFINICIÓN 12.25. La relación $>_f$ se define en $\mathbf{Fr}$ como:

$$\boxed{\frac{m_1}{n_1} >_f \frac{m_2}{n_2} \iff \frac{m_2}{n_2} <_f \frac{m_1}{n_1} \iff m_1 \cdot n_2 > m_2 \cdot n_1}$$

TEOREMA 12.5. *Si $x \in \mathbf{Fr}$, entonces existe $y \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (x \simeq_f y) \ \wedge \ x <_f y$.*

Demostración. Definimos $x = \dfrac{m_1}{n_1}$ e $y = \dfrac{m_2}{n_2}$. Por Contradicción, supondremos que para todo $y \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (x \simeq_f y)$ se cumple $x >_f y$. Por Definición 12.25, esto implica que $m_1 \cdot n_2 > m_2 \cdot n_1$. Si hacemos $p = m_1 \cdot n_2$ y $q = m_2 \cdot n_1$, esto implica que existe p tal que para todo q se cumple $p > q$. Esto contradice el Teorema 11.79, lo que demuestra lo pedido. □

TEOREMA 12.6. *Si $x, y \in \mathbf{Fr}$ y $x <_f y$, entonces existe $z \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (z \simeq_f x) \wedge \ \sim (z \simeq_f y)$ y $x <_f z <_f y$.*

Demostración. Debemos entender que $x <_f z <_f y \iff x <_f z \ \wedge \ z <_f y$.

Dados $x, y \in \mathbf{Fr}$, por Contradicción, suponemos que $x <_f y$ y que para todo $z \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (z \simeq_f x) \wedge \ \sim (z \simeq_f y)$ se cumple $\sim (x <_f z) \vee \ \sim (z <_f y)$. Por Teorema 12.4, esto significa que $z <_f x \ \vee \ y <_f z$.

El primer caso indicaría que para todo $z \in \mathbf{Fr}$ ocurre $z <_f x$, lo que contradice el Teorema 12.5. Esto demuestra que $\boxed{x <_f z}$.

Ahora, definimos $y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$. Decir que $y <_f z$ equivale a decir, por Definición 12.24, que $m_2 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_2$. Como lo anterior es válido para todo z, en particular debe ser válido para $z = 0$ (es decir, para $m_3 = 0$). Así, se obtiene $m_2 \cdot n_3 < 0 \cdot n_2$. Por Ejercicio 10.3, se obtiene $m_2 \cdot n_3 < 0$, lo que contradice el Ejercicio 11.2. Por lo tanto, se obtiene que $\boxed{z <_f y}$. □

TEOREMA 12.7. *Si $x, y, u, v \in \mathbf{Fr}$ son tales que $x <_f y$ y $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces $u <_f v$.*

Demostración. Definiendo $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, u = \dfrac{m_3}{n_3}, v = \dfrac{m_4}{n_4}$, de las hipótesis se obtiene por Definición 12.23 y Definición 12.24 que:

$$m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_4 = m_4 \cdot n_2$$

Desarrollando la desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 && / \text{ Ejercicio 11.1} \\
\iff \ & m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \cdot n_3 && / \text{ Hipótesis} \\
\iff \ & m_3 \cdot \underline{n_1} \cdot n_2 < m_2 \cdot \underline{n_1} \cdot n_3 && / \text{ Ejercicio 11.1} \\
\iff \ & m_3 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_3 && / \text{ Ejercicio 11.1} \\
\iff \ & m_3 \cdot n_2 \cdot m_4 < m_2 \cdot n_3 \cdot m_4 && / \text{ Hipótesis} \\
\iff \ & m_3 \cdot \underline{m_2} \cdot n_4 < \underline{m_2} \cdot n_3 \cdot m_4 && / \text{ Ejercicio 11.1} \\
\iff \ & m_3 \cdot n_4 < m_4 \cdot n_3
\end{aligned}$$

Finalmente, la desigualdad obtenida implica por Definición 12.24 que $\boxed{u <_f v}$. □

12.4. Suma de fracciones no negativas

También entenderemos que la suma de los naturales es la misma suma de cardinales.

DEFINICIÓN 12.26. La suma en $\mathbf{Fr}$ se define como: $\boxed{\frac{m_1}{n_1} +_f \frac{m_2}{n_2} \simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}}$

TEOREMA 12.8. *La operación $+_f$ está bien definida.*

Demostración. Debemos demostrar que el resultado de la suma es una fracción no negativa y que es único. Tanto la suma como el producto de cardinales están bien definidos; es decir, tanto el numerador como el denominador del resultado son cardinales (y además finitos). Además, el denominador del resultado es distinto de cero (Contrapositivo del Ejercicio 11.3). Por lo tanto, el resultado de la suma es una fracción no negativa.

Para demostrar que el resultado de la suma es único, se debe mostrar que si $x + y \simeq_f z$ y $x + y \simeq_f w$, entonces $z \simeq_f w$. Sin embargo, esto es trivial por Teorema 12.1. □

Observación: En este punto, se abandona la notación $+_f$ y se usará solamente $+$, suponiendo que ya se entiende el contexto en que actúa.

TEOREMA 12.9. *Si x, y, u, v, son tales que $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces $x + y \simeq_f u + v$.*

Demostración. Definiendo que $x = \frac{m_1}{n_1}, y = \frac{m_2}{n_2}, u = \frac{m_3}{n_3}, v = \frac{m_4}{n_4}$, de las hipótesis se obtiene por Definición 12.23 que $m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_4 = m_4 \cdot n_2$. Con ello, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} &\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} && / \text{ Teorema 12.2} \\
&\simeq_f \frac{(m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1) \cdot (n_3 \cdot n_4)}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_3 \cdot n_4)} && / \text{ Teorema 10.62} \\
&\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 + m_2 \cdot n_1 \cdot n_3 \cdot n_4}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_3 \cdot n_4)} && / \text{ Hipótesis} \\
&\simeq_f \frac{m_3 \cdot n_2 \cdot n_1 \cdot n_4 + m_4 \cdot n_1 \cdot n_3 \cdot n_2}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 \cdot n_4} && / \text{ Teorema 10.62} \\
&\simeq_f \frac{(m_3 \cdot n_4 + m_4 \cdot n_3) \cdot (n_1 \cdot n_2)}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 \cdot n_4} && / \text{ Teorema 12.2} \\
&\simeq_f \frac{m_3 \cdot n_4 + m_4 \cdot n_3}{n_3 \cdot n_4} && / \text{ Definición 12.26} \\
&\simeq_f \frac{m_3}{n_3} + \frac{m_4}{n_4}
\end{aligned}
$$

TEOREMA 12.10. *Si $n \neq 0$, entonces $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} \simeq_f \frac{m+p}{n}$.* □

Demostración. $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} \simeq_f \frac{m \cdot n + p \cdot n}{n \cdot n} \simeq_f \frac{(m+p) \cdot n}{n \cdot (n)} \simeq_f \frac{m+p}{n}$ □

TEOREMA 12.11. *$+_f$ es conmutativa y asociativa.*

Demostración. $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} \simeq_f \frac{m_2 \cdot n_1 + m_1 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_1} \simeq_f \frac{m_2}{n_2} + \frac{m_1}{n_1}$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) + \frac{m_3}{n_3} &\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} + \frac{m_3}{n_3} \simeq_f \frac{(m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1) \cdot n_3 + m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2)}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3} \\
&\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 \cdot n_3 + m_2 \cdot n_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) + (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \cdot n_1}{n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)} \\
&\simeq_f \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1}{n_1} + \left(\frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3}\right)
\end{aligned}
$$

□

TEOREMA 12.12. $x <_f y \iff x + z <_f y + z$

Demostración. Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\begin{aligned}
\boxed{x <_f y} &\iff \frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 < n_1 \cdot m_2 \iff m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 < n_1 \cdot m_2 \cdot n_3 \\
&\iff m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 + m_3 \cdot n_1 \cdot n_2 < n_1 \cdot m_2 \cdot n_3 + n_1 \cdot m_3 \cdot n_2 \\
&\iff (m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1) \cdot (n_2) < (n_1) \cdot (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \\
&\iff (m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1) \cdot (n_2 \cdot n_3) < (n_1 \cdot n_3) \cdot (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \\
&\iff \frac{m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_3} <_f \frac{m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_3} \\
&\iff \boxed{x + z <_f y + z}
\end{aligned}$$

□

12.5. Producto de fracciones no negativas

Entenderemos que el producto de los naturales es el mismo producto de cardinales.

DEFINICIÓN 12.27. El producto en $\mathbf{Fr}$ se define como: $\boxed{\dfrac{m_1}{n_1} \bullet_f \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}}$

TEOREMA 12.14. *La operación $\bullet_f$ está bien definida.*

Demostración. Debemos demostrar que el resultado del producto es una fracción no negativa y que es único. El producto de cardinales está bien definido, por lo que el numerador y el denominador del resultado son cardinales (y además finitos). Además, el denominador del resultado es distinto de cero (Contrapositivo del Ejercicio 11.3). Por lo tanto, el resultado del producto es una fracción no negativa. En tanto, para demostrar que el resultado del producto es único, se debe mostrar que si $x \cdot y \simeq_f z$ y $x \cdot y \simeq_f w$, entonces $z \simeq_f w$. Sin embargo, esto es trivial por Teorema 12.1. □

Observación: En este punto, se abandona la notación $\bullet_f$ y se usará solamente $(\cdot)$, suponiendo que ya se entiende el contexto en que actúa.

TEOREMA 12.15. *Si x, y, u, v, son tales que $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces $x \cdot y \simeq_f u \cdot v$.*

Demostración. Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, u = \dfrac{m_3}{n_3}, v = \dfrac{m_4}{n_4}$, de las hipótesis se obtiene por Definición 12.23 que $m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_4 = m_4 \cdot n_2$. Con ello, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} &\simeq_f \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \simeq_f \frac{(m_1 \cdot m_2) \cdot (n_3 \cdot n_4)}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_3 \cdot n_4)} \simeq_f \frac{(m_3 \cdot n_1) \cdot (m_4 \cdot n_2)}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4} \simeq_f \frac{(m_3 \cdot n_4) \cdot (n_1 \cdot n_2)}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 \cdot n_4} \\
&\simeq_f \frac{m_3 \cdot n_4}{n_3 \cdot n_4} \simeq_f \frac{m_3}{n_3} \cdot \frac{m_4}{n_4}
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 12.16. *Para la operación $\bullet_f$ se cumple:*

16A. *$\bullet_f$ es conmutativa.*

16B. *$\bullet_f$ es asociativa.*

16C. *$\bullet_f$ distribuye sobre $+_f$.*

Demostración. **16A.** $\dfrac{m_1}{n_1} \cdot \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \simeq_f \dfrac{m_2 \cdot m_1}{n_2 \cdot n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2} \cdot \dfrac{m_1}{n_1}$ □

Demostración. **16B.**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}\right) \cdot \frac{m_3}{n_3} &\simeq_f \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{m_3}{n_3} \simeq_f \frac{(m_1 \cdot m_2) \cdot m_3}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)}{n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)} \\
&\simeq_f \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1}{n_1} \cdot \left(\frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{m_3}{n_3}\right)
\end{aligned}$$

□

Demostración. **16C.**

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\left(\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}\right)\simeq_f \frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2\cdot n_3+m_3\cdot n_2}{n_2\cdot n_3}\simeq_f \frac{m_1(m_2\cdot n_3+m_3\cdot n_2)}{n_1\cdot(n_2\cdot n_3)}$$
$$\simeq_f \frac{m_1\cdot m_2\cdot n_3+m_1\cdot m_3\cdot n_2}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}\simeq_f \frac{m_1\cdot m_2\cdot n_3}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}+\frac{m_1\cdot m_3\cdot n_2}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}$$
$$\simeq_f \frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}+\frac{m_1\cdot m_3}{n_1\cdot n_3}\simeq_f \frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_3}{n_3}$$

TEOREMA 12.17. $x\cdot z<_f y\cdot z \iff x<_f y$ □

Demostración. Si $x=\frac{m_1}{n_1}, y=\frac{m_2}{n_2}, z=\frac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\boxed{x\cdot z<_f y\cdot z} \iff \frac{m_1\cdot m_3}{n_1\cdot n_3}<_f\frac{m_2\cdot m_3}{n_2\cdot n_3} \iff (m_1\cdot m_3)\cdot(n_2\cdot n_3)<(n_1\cdot n_3)\cdot(m_2\cdot m_3)$$
$$\iff m_1\cdot n_2<n_1\cdot m_2 \iff \frac{m_1}{n_1}<_f\frac{m_2}{n_2} \iff \boxed{x<_f y}$$

TEOREMA 12.18. *Si* $x,y\in\mathbf{Fr}\ \wedge\ \frac{0}{1}<_f y$, *entonces* $(\exists z\in\mathbf{Fr})\ :\ (x\simeq_f y\cdot z)$ □

Demostración. Sean $x=\frac{m_1}{n_1}, y=\frac{m_2}{n_2}$. Como $\frac{0}{1}<_f y$, esto significa que $0\cdot n_2<m_2\cdot 1$ o, mejor dicho, que $\boxed{0<m_2}$. Con ello, si hacemos $\boxed{z=\frac{m_1\cdot n_2}{m_2\cdot n_1}}$, se obtiene:

$$y\cdot z\simeq_f\left(\frac{m_2}{n_2}\right)\left(\frac{m_1\cdot n_2}{m_2\cdot n_1}\right)\simeq_f\frac{m_2\cdot(m_1\cdot n_2)}{n_2\cdot(m_2\cdot n_1)}\simeq_f\frac{m_1\cdot(m_2\cdot n_2)}{n_1\cdot(m_2\cdot n_2)}\simeq_f\frac{m_1}{n_1}\simeq_f x$$

□

12.5.1. Ejercicios propuestos

12.1. (Solución 12.1) **Para** $x,y,z\in\mathbf{Fr}$**, demostrar que** $x\simeq_f y \iff x+z\simeq_f y+z$

12.2. (Solución 12.2) **Para** $x,y,z\in\mathbf{Fr}$**, demostrar que** $x\simeq_f y \iff x\cdot z\simeq_f y\cdot z$

DEFINICIÓN 12.28. $0_f=\frac{0}{1}$ y $1_f=\frac{1}{1}$

12.3. (Solución 12.3) **Para** $x,y,z\in\mathbf{Fr}$**, demostrar que** $x+0_f\simeq_f x$

12.4. (Solución 12.4) **Para** $x,y,z\in\mathbf{Fr}$**, demostrar que** $x\cdot 0_f\simeq_f 0_f$

12.5. (Solución 12.5) **Para** $x,y,z\in\mathbf{Fr}$**, demostrar que** $x\cdot 1_f\simeq_f x$

12.6. (Solución 12.6) **Defina una relación de orden menor o igual en el conjunto** $\mathbf{Fr}$**, simbolizada por** $\leqslant_f$**, a partir de lo visto en el Curso.**

12.7. (Solución 12.7) **Verifique si** $\leqslant_f$ **es antisimétrica.**

12.8. (Solución 12.8) **Si** $x,y,u,v\in\mathbf{Fr}$ **tales que** $x\leqslant_f y\ \wedge\ x\simeq_f u\ \wedge\ y\simeq_f v$**, demostrar que** $u\leqslant_f v$.

12.9. (Solución 12.9) **Si** $x,y,z\in\mathbf{Fr}$ **son tales que** $x\leqslant_f y\ \wedge\ y<_f z$**, demostrar que** $x<_f z$.

12.5.2. Una solución para los Ejercicios propuestos

12.1. (Ejercicio 12.1) ***Solución.*** Definiendo que $x=\frac{m_1}{n_1}, y=\frac{m_2}{n_2}, z=\frac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\boxed{x\simeq_f y} \iff \frac{m_1}{n_1}\simeq_f\frac{m_2}{n_2} \iff m_1\cdot n_2=n_1\cdot m_2 \iff m_1\cdot n_3\cdot n_2=n_1\cdot m_2\cdot n_3$$
$$\iff m_1\cdot n_3\cdot n_2+m_3\cdot n_1\cdot n_2=n_1\cdot m_2\cdot n_3+n_1\cdot m_3\cdot n_2$$
$$\iff (m_1\cdot n_3+m_3\cdot n_1)\cdot(n_2)=(n_1)\cdot(m_2\cdot n_3+m_3\cdot n_2)$$
$$\iff (m_1\cdot n_3+m_3\cdot n_1)\cdot(n_2\cdot n_3)=(n_1\cdot n_3)\cdot(m_2\cdot n_3+m_3\cdot n_2)$$
$$\iff \frac{m_1\cdot n_3+m_3\cdot n_1}{n_1\cdot n_3}\simeq_f\frac{m_2\cdot n_3+m_3\cdot n_2}{n_2\cdot n_3} \iff \boxed{x+z\simeq_f y+z}$$

□

12.2. (Ejercicio 12.2) ***Solución.*** Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\boxed{x \cdot z \simeq_f y \cdot z} \iff \frac{m_1 \cdot m_3}{n_1 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_2 \cdot m_3}{n_2 \cdot n_3} \iff (m_1 \cdot m_3) \cdot (n_2 \cdot n_3) = (n_1 \cdot n_3) \cdot (m_2 \cdot m_3)$$
$$\iff m_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2 \iff \frac{m_1}{n_1} \simeq_f \frac{m_2}{n_2} \iff \boxed{x \simeq_f y}$$

□

12.3. (Ejercicio 12.3) ***Solución.*** Definiendo que $x = \dfrac{m}{n}$ y considerando $0_f = \dfrac{0}{1}$, se obtiene directamente que:

$$x + 0_f \simeq_f \frac{m}{n} + \frac{0}{1} \simeq_f \frac{m \cdot 1 + 0 \cdot n}{n \cdot 1} \simeq_f \frac{m+0}{n} \simeq_f \frac{m}{n} \simeq_f x$$

□

12.4. (Ejercicio 12.4) ***Solución.*** Definiendo que $x = \dfrac{m}{n}$ y considerando $0_f = \dfrac{0}{1}$, se obtiene directamente que:

$$x \cdot 0_f \simeq_f \frac{m}{n} \cdot \frac{0}{1} \simeq_f \frac{m \cdot 0}{n \cdot 1} \simeq_f \frac{0}{n} \simeq_f \frac{0}{1} \simeq_f 0_f$$

□

12.5. (Ejercicio 12.5) ***Solución.*** Definiendo que $x = \dfrac{m}{n}$ y considerando $1_f = \dfrac{1}{1}$, se obtiene directamente que:

$$x \cdot 1_f \simeq_f \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} \simeq_f \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} \simeq_f \frac{m}{n} \simeq_f x$$

□

12.6. (Ejercicio 12.6) ***Solución.*** En el conjunto $\mathbf{Fr}$ ya está definida la relación de equivalencia $\simeq_f$ y el orden estricto $<_f$. A partir de ellos, se define la relación de orden ***menor o igual*** $\leqslant_f$ como:

$$\boxed{\frac{m_1}{n_1} \leqslant_f \frac{m_2}{n_2}} \iff \frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2} \vee \frac{m_1}{n_1} \simeq_f \frac{m_2}{n_2}$$
$$\iff m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \vee m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$
$$\iff \boxed{m_1 \cdot n_2 \leqslant m_2 \cdot n_1}$$

□

12.7. (Ejercicio 12.7) ***Solución.*** Definimos $x = \dfrac{m}{n}$ e $y = \dfrac{p}{q}$. Para ver que $\leqslant_f$ es antisimétrica, suponemos que $x \leqslant_f y \wedge y \leqslant_f x$ y debemos demostrar que $x \simeq_f y$. A partir de las hipótesis es inmediato que:

$$x \leqslant_f y \wedge y \leqslant_f x \implies \frac{m}{n} \leqslant_f \frac{p}{q} \wedge \frac{p}{q} \leqslant_f \frac{m}{n}$$
$$\implies m \cdot q \leqslant n \cdot p \wedge n \cdot p \leqslant m \cdot q \qquad / \text{ Teorema 11.73}$$
$$\implies m \cdot q = n \cdot p$$

Aplicando la Definición 12.23, se obtiene $\dfrac{m}{n} \simeq_f \dfrac{p}{q}$, de donde se concluye que $x \simeq_f y$. □

12.8. (Ejercicio 12.8) ***Solución.*** De la primera hipótesis $x \leqslant_f y$ se deduce que $x <_f y \vee x \simeq_f y$. Como además se cumplen $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces por Teorema 12.1 dos veces se cumple $u \simeq_f v$, mientras que por Teorema 12.7 se cumple $u <_f v$. De ambas hipótesis se recupera que $u \leqslant_f v$. □

12.9. (Ejercicio 12.9) ***Solución.*** De la primera hipótesis $x \leqslant_f y$ se deduce que $x <_f y \vee x \simeq_f y$. En el primer caso, como $x <_f y$ e $y <_f z$, por Teorema 12.3 se obtiene $x <_f z$. En el segundo caso, como $x \simeq_f y$ e $y <_f z$, considerando además que $z \simeq_f z$, por Teorema 12.7 se obtiene también $x <_f z$. □