22234 Fundamentos II – Ayudantía 13

Transición entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ (Teo. 33–42)

EDGARD ALEJANDRO ARAYA CARREÑO – edgard.araya@usach.cl

13.1. Valor Absoluto y Parte Entera en $\mathbb{Q}$ (Teorema 33)

A partir de este punto, hablaremos del conjunto de los Racionales como $\mathbb{Q}$, mientras que $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$ representarán números racionales en el sentido habitual.

DEFINICIÓN 35: Si $x \in \mathbb{Q}$, se define $|x|$ como: $|x| = x$ si $x \geqslant 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$

TEOREMA 33. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces se cumple:

33A. $|x| \geqslant 0$ y $|x| = 0 \iff x = 0$

33B. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

33C. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

33D. $|x| - |y| \leqslant |x - y|$

33E. $x|y| \leqslant |xy|$

Demostración: **33A.** Si $x > 0$, como $|x| = x$, se sigue que $|x| > 0$, de donde $|x| \geqslant 0$.

Si $x < 0$, como $|x| = -x$, por **Ejercicio 12G** se sigue que $|x| > 0$, de donde $|x| \geqslant 0$.

Si $x = 0$, como $|x| = x$, entonces $|x| = 0$, de donde $|x| \geqslant 0$.

Las tres afirmaciones anteriores demuestran que $(\forall x \in Q)(|x| \geqslant 0)$.

La tercera afirmación demuestra que $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$. Para demostrar que $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$, suponemos por Contradicción que $|x| = 0$ y $x \neq 0$. Así, debe ocurrir que $x > 0$ o $x < 0$. Según lo demostrado más arriba, de $x > 0$ se obtiene $|x| > 0$, mientras que de $x < 0$ se obtiene $|x| > 0$. En ambos casos, se contradice que $|x| = 0$, por lo que se concluye que $x = 0$ $\square$.

33B. Si $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0$, entonces $xy \geqslant 0$. Así, $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$.

Si $x < 0 \wedge y \geqslant 0$, por **Ejercicio 12K** se obtiene $x \cdot y \leqslant 0$. Así, $|x| \cdot |y| = (-x)y$ y $|xy| = -(xy)$. Por **Ejercicio 12M**, se obtiene $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$.

Si $x < 0 \wedge y < 0$, por **Ejercicio 12L** se obtiene $x \cdot y > 0$. Así, $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y)$ y $|xy| = xy$. Por **Ejercicio 12N**, se obtiene $|x| \cdot |y| = |xy|$ $\square$.

33C. Si $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0$, entonces $x + y \geqslant 0$, de donde $|x + y| = x + y$. Además, $|x| + |y| = x + y$. Luego, $|x + y| = |x| + |y|$, lo que implica $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Si $x < 0 \wedge y < 0$, entonces $x + y < 0$. Luego, $|x + y| = -(x + y)$. Además, $|x| + |y| = (-x) + (-y)$. Por **Ejercicio 12Ñ**, se obtiene $|x + y| = |x| + |y|$, lo que implica $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ $\square$.

33D. Considerar que $x - y = x + (-y)$. Por **Ejercicio 13B**, se obtiene $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$ y $-|x - y| \leqslant x - y \leqslant |x - y|$. Luego, aplicando varias veces el **Ejercicio 12P**, se obtiene que $-|x - y| - |y| \leqslant (x - y) + y \leqslant |x - y| + |y|$. Es decir, $-(|x - y| + |y|) \leqslant x \leqslant |x - y| + |y|$. Por **Ejercicio 13B**, se sigue que $|x| \leqslant |x - y| + |y|$. Luego, por **Teorema 32M** se concluye que $|x| - |y| \leqslant |x - y|$ $\square$.

33E. Si $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0$, entonces $xy \geqslant 0$. Así, $x \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$, de donde $x \cdot |y| = x \cdot y \leqslant |x \cdot y|$

Si $x < 0 \wedge y \geqslant 0$, por **Ejercicio 12K** se obtiene $x \cdot y \leqslant 0$. Así, $x \cdot |y| = xy \leqslant 0$ y $|xy| = -(xy) \geqslant 0$. Así, se obtiene $x \cdot |y| \leqslant |x \cdot y|$.

Si $x < 0 \wedge y < 0$, por **Ejercicio 12L** se obtiene $x \cdot y > 0$. Así, $x \cdot |y| = x \cdot (-y) = -(xy) < 0$ y $|xy| = xy > 0$. Así, se obtiene $x \cdot |y| < |xy|$, de donde $x \cdot |y| \leqslant |xy|$ $\square$.

DEFINICIÓN 37: Si $x \in \mathbb{Q}$, se define:

- **Parte entera clásica o función suelo:** $\lfloor x \rfloor$ como el mayor entero menor o igual a x; es decir, dados $x \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\lfloor x \rfloor = n} \iff n \leqslant x \ \wedge \ (\forall m \in \mathbb{N})(m \leqslant x \ \wedge \ m \leqslant n)$
  - $\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 0$
  - $\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor = 1$
  - $\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$
- **Sucesor de Parte entera o Función Techo:** $\lceil x \rceil$ como el menor entero mayor o igual a x; es decir, dados $x \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\lceil x \rceil = n} \iff x \leqslant n \ \wedge \ (\forall m \in \mathbb{N})(x \leqslant m \ \wedge \ n \leqslant m)$
  - $\left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1$
  - $\left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil = 1$
  - $\left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2$

13.2. Sucesiones en $\mathbb{Q}$ (Teoremas 35 y 36)

DEFINICIONES 38, 39, 40 y 41:

- x es sucesión sobre el conjunto B si $x : \mathbb{N} \longrightarrow B$
- Dado n, diremos que x_n es el n-ésimo término de x, con $x_n = x(n)$.
- Una notación no tan usual es $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$; es decir, que x es un conjunto ordenado cuyos elementos son $x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots$ Notar que este conjunto es equipotente con $\mathbb{N}$ (es decir, no es finito).
- Así, una sucesión x de números racionales tendrá recorrido $B = \mathbb{Q}$. Esto quiere decir que $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in \mathbb{Q})$; es decir, cada término de una sucesión es un número racional.
- Por último, mencionar que dos sucesiones son iguales si sus términos correspondientes son iguales (en el mismo orden); es decir, $x = y \iff (\forall n \in \mathbb{N})(x_n = y_n)$

DEFINICIÓN 42: (SUMA DE SUCESIONES) Si x, y son sucesiones racionales, entonces z será la sucesión suma de x e y; es decir: $\boxed{x + y = z \iff (\forall n \in \mathbb{N})(x_n + y_n = z_n)}$.

DEFINICIÓN 43: (PRODUCTO DE SUCESIONES) Si x, y son sucesiones racionales, entonces z será la sucesión producto de x e y; es decir: $\boxed{x \cdot y = z \iff (\forall n \in \mathbb{N})(x_n \cdot y_n = z_n)}$.

TEOREMA 35. La suma de sucesiones es conmutativa, asociativa y cancelativa.

Demostración: Como la suma de números racionales es conmutativa y asociativa (**Teorema 33**, entonces $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n + y_n = y_n + x_n)$ y $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n + (y_n + z_n) = (x_n + y_n) + z_n$. Así, $x + y = y + x$ y $x + (y + z) = (x + y) + z$.

La propiedad cancelativa indica que $x + z = y + z \iff x = y$. Partiendo de $x + z = y + z$, por **Definición 42** esto equivale a $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n + z_n = y_n + z_n)$. Por **Ejercicio 12R** esto equivale a $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n = y_n)$ y, por **Definición 38**, esto equivale a $x = y$ $\square$.

TEOREMA 36. El producto de sucesiones es conmutativo, asociativo y cancelativo.

Demostración: Como el producto de números racionales es conmutativo y asociativo (**Teorema 33**, entonces $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \cdot y_n = y_n \cdot x_n)$ y $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \cdot (y_n \cdot z_n) = (x_n \cdot y_n) \cdot z_n$. Así, $x \cdot y = y \cdot x$ y $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

La propiedad cancelativa indica que $x \cdot z = y \cdot z \iff x = y$. Partiendo de $x \cdot z = y \cdot z$, por **Definición 43** esto equivale a $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \cdot z_n = y_n \cdot z_n)$. Por **Ejercicio 12S** esto equivale a $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n = y_n)$ y, por **Definición 38**, esto equivale a $x = y$ $\square$.

13.3. Sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ (Teoremas 37−42)

<u>DEFINICIÓN 44:</u> x es Sucesión Racional de Cauchy si y sólo si x es sucesión de números racionales y:

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall m, n \in \mathbb{N})(m > N \ \wedge n > N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon)}$$

Por ejemplo, la sucesión definida por $x_0 = 1 \ \wedge x_n = \dfrac{1}{n}$ es de Cauchy. Para ello, **dado** $\varepsilon > 0$, **primero debemos encontrar** $N = N(\varepsilon)$ (es decir, N depende de ε) de tal forma que se cumpla lo pedido en la **<u>Definición 44</u>**. Haciendo el borrador, vemos que:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{m-n}{m \cdot n}\right| < \varepsilon \iff \frac{|m-n|}{m \cdot n} < \varepsilon$$

$$\boxed{m > n} \implies \frac{|m-n|}{m \cdot n} = \frac{m-n}{m \cdot n} < \frac{m \cdot 1}{m \cdot n} = \boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n} \overset{x \leqslant [x]}{\iff} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < n$$

$$\boxed{n > m} \implies \frac{|m-n|}{m \cdot n} = \frac{n-m}{m \cdot n} < \frac{n \cdot 1}{n \cdot m} = \boxed{\frac{1}{m} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < m} \overset{x \leqslant [x]}{\iff} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < m$$

$$\boxed{n = m} \implies \frac{|m-n|}{m \cdot n} = \frac{0}{m \cdot n} = 0 < \varepsilon \text{ (vale para todo } m, n \in \mathbb{N})$$

$$\boxed{1 < \varepsilon} \implies 0 < \frac{1}{\varepsilon} < 1 \implies \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = \boxed{1 = N(\varepsilon)} \qquad \boxed{0 < \varepsilon < 1} \implies 1 < \frac{1}{\varepsilon} \implies 1 < \boxed{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = N(\varepsilon)}$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, hacemos $N(\varepsilon) = \left\lceil \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Así, para $m, n > N$ se tiene:

$$\boxed{\varepsilon > 1} \implies 0 < \frac{1}{\varepsilon} < N = 1 < \text{mín}\{m, n\} \implies \text{máx}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \frac{1}{N} = 1 < \varepsilon$$

$$\implies |x_n - x_m| < \text{máx}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon$$

$$\boxed{0 < \varepsilon < 1} \implies 1 < \frac{1}{\varepsilon} \leqslant N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil < \text{mín}\{m, n\} \implies \text{máx}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$$

$$\implies |x_n - x_m| < \text{máx}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon$$

Por lo tanto, la sucesión dada es de Cauchy $\square$.

<u>TEOREMA 37</u>. Si x es sucesión racional de Cauchy, entonces existe $\delta \in \mathbb{Q} \ \wedge \ \delta > 0$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(|x_n| < \delta)$.

Demostración: Como x es sucesión racional de Cauchy, por **<u>Definición 44</u>** existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m > N \ \wedge \ n > N \implies |x_n - x_m| < 1)$ (esto se logra escogiendo $\varepsilon = 1 > 0$).

Sea $\boxed{\delta = 1 + \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_N|, |x_{N+1}|\}}$. Aquí es inmediato que $\boxed{(\forall n \leqslant N+1)(|x_n| < \delta)}$. Ahora, si $N + 1 < n$, entonces $|x_n - x_{N+1}| < 1$ implica (por **<u>Teorema 33D</u>**) que $|x_n| - |x_{N+1}| < 1$. Es evidente que de allí se sigue que $|x_n| < 1 + |x_{N+1}|$. Como $|x_{N+1}| < \delta$ (demostrado dos líneas antes), se concluye que $(\forall n > N+1)(|x_n| < \delta)$.

Por lo tanto, el δ definido es tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(|x_n| < \delta)$ $\square$.

<u>TEOREMA 38A</u>. Si x, y son sucesiones racionales de Cauchy, entonces $x + y$ es sucesión racional de Cauchy.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, como x, y son sucesiones racionales de Cauchy, por **<u>Definición 44</u>** existen $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$ tales que:

$$(\forall m, n > N_1)\left(|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge (\forall m, n > N_2)\left(|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Luego, haciendo $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, para $m, n > N$ se tiene:

$$\Big|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\Big| \leqslant |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto, la sucesión $x + y$ es de Cauchy $\square$.

<u>TEOREMA 38B</u>. Si x, y son sucesiones racionales de Cauchy, entonces $x \cdot y$ es sucesión racional de Cauchy.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por **<u>Teorema 37</u>**, existen δ_1 y δ_2 tales que $(\forall n \in \mathbb{N})(|x_n| < \delta_1 \wedge |y_n| < \delta_2)$. Desde aquí, consideramos $\delta = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2\}$.

Como x, y son sucesiones racionales de Cauchy, por **<u>Definición 44</u>** existen $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$ tales que:

$$(\forall m, n > N_1)\left(|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) \wedge (\forall m, n > N_2)\left(|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)$$

Luego, haciendo $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, para $m, n > N$ se tiene:

$$\begin{aligned}\Big|(x_n \cdot y_n) - (x_m \cdot y_m)\Big| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y_m + x_n \cdot y_m - x_m \cdot y_m| = |x_n \cdot (y_n - y_m) + y_m \cdot (x_n - x_m)| \\ &\leqslant |x_n \cdot (y_n - y_m)| + |y_m \cdot (x_n - x_m)| = |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |y_m| \cdot |x_n - x_m| \\ &< \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2\delta} + \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2\delta} = \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $x + y$ es de Cauchy $\square$.

<u>DEFINICIÓN 45:</u> Si x, y son sucesiones racionales de Cauchy, se define la relación $\simeq_c$ como:

$$\boxed{x \simeq_c y} \iff \boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})(n > N \implies |x_n - y_n| < \varepsilon)}$$

Notar que dos sucesiones no tienen que ser iguales para ser equivalentes. Por ejemplo, las sucesiones $x_0 = 1, x_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$ e $y_0 = 0, y_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ son distintas para todo $n \in \mathbb{N}$ pero son equivalentes:

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{n^2+1}{n^2} - \frac{n^2-1}{n^2}\right| = \left|\frac{2}{n^2}\right| = \frac{2}{n^2} \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < n \iff \left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil < n$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, hacemos $N(\varepsilon) = \left\lceil\dfrac{2}{\varepsilon}\right\rceil$. Así, para $n > N$ se tiene:

$$\begin{aligned}\boxed{\varepsilon > 1} &\implies 0 < \frac{1}{\varepsilon} < 1 < \frac{n}{2} \implies 0 < \frac{2}{\varepsilon} < N = 2 < n \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\implies \frac{2}{n} < \frac{2}{N} = 1 < \varepsilon \implies |x_n - y_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon \\ \boxed{0 < \varepsilon < 1} &\implies 2 < \frac{2}{\varepsilon} \leqslant N = \left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil < n \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \implies \frac{2}{n} < \frac{2}{N} \leqslant \varepsilon \\ &\implies |x_n - y_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, las sucesiones x, y son equivalentes (es decir, $x \simeq_c y$) $\square$.

TEOREMA 39. $\simeq_c$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las sucesiones racionales de Cauchy.

Demostración: Como ya es acostumbrado, debemos demostrar que la relación es refleja, simétrica y transitiva:

39A. $\boxed{x \simeq_c x}$. Dado $\varepsilon > 0$, es evidente que $x = x$, lo que implica que $x - x = 0$. Dicho en lenguaje de sucesiones, $(\forall n \in \mathbb{N})(|x_n - x_n| = 0 < \varepsilon)$, lo que demuestra lo pedido.

39B. $\boxed{x \simeq_c y \implies y \simeq_c x}$. Dado $\varepsilon > 0$, de la hipótesis se sigue que existe N tal que $n > N \implies |x_n - y_n| < \varepsilon$. Como $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$ (por **Ejercicio 13D**), entonces existe N tal que $n > N \implies |y_n - x_n| < \varepsilon$. Luego, se obtiene que $y \simeq_c x$.

39C. $\boxed{x \simeq_c y \ \wedge \ y \simeq_c z \implies x \simeq_c z}$. Dado $\varepsilon > 0$, de la hipótesis se sigue que existe N_1 tal que $n > N_1 \implies |x_n - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, mientras que existe N_2 tal que $n > N_2 \implies |y_n - z_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Haciendo $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se obtiene para $n > N$:

$$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leqslant |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \boxed{x \simeq_c z}$$

Finalmente, se concluye que $\simeq_c$ es una relación de equivalencia $\square$.

DEFINICIÓN 46: Si x, y son sucesiones racionales de Cauchy, se define la relación $<_c$ como:

$$\boxed{x <_c y} \iff \boxed{(\exists \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})(n > N \implies y_n > x_n + \delta)}$$

TEOREMA 40. Si x, y son sucesiones racionales de Cauchy, entonces $x <_c y \ \vee \ x \simeq_c y \ \vee y <_c x$.

Demostración: Primero, demostraremos que si $x \simeq_c y$, entonces $\sim (x <_c y) \ \wedge \ \sim (y <_c x)$. La negación de la **Definición 46** queda como sigue:

$$\boxed{\sim (x <_c y)} \iff (\forall \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) \left(n > N \implies \boxed{y_n \leqslant x_n + \delta}\right)$$

A partir de $x \simeq_c y$, por **Definición 45**, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \implies |x_n - y_n| < \varepsilon$. Desarrollando la última desigualdad, se obtiene:

$$|x_n - y_n| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - y_n < \varepsilon \iff y_n - \varepsilon < x_n \ \wedge \ x_n < y_n + \varepsilon \iff y_n < x_n + \varepsilon \ \wedge \ x_n < y_n + \varepsilon$$

$$\iff \boxed{y_n \leqslant x_n + \varepsilon} \ \wedge \ \boxed{x_n \leqslant y_n + \varepsilon}$$

Así, hemos demostrado que $\boxed{x \simeq_c y \implies \sim (x <_c y) \ \wedge \ \sim (y <_c x)}$.

Ahora, suponemos que $\sim (x \simeq_c y)$. Esto implica que $(x <_c y \ \vee \ y <_c x)$. Veremos que no pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo.

Como supusimos que $\sim (x \simeq_c y)$, por negación de la **Definición 45** se sigue que:

$$\boxed{\sim (x \simeq_c y)} \iff (\exists \varepsilon > 0) : (\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n > N \implies |x_n - y_n| \geqslant 2 \cdot \varepsilon)$$

Por **Definición 44**, como x, y son sucesiones racionales de Cauchy, se sigue que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}) : (\forall m, n \in \mathbb{N}) \left(m, n > N_1 \ \wedge m, n > N_2 \implies |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Hacemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y hacemos $p > N$ tal que $|x_p - y_p| \geqslant 2 \cdot \varepsilon$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\boxed{y_p < x_p}$ (esto quiere decir que el otro caso es análogo). Así, se sigue que $x_p \geqslant y_p + 2 \cdot \varepsilon$. Además, para $n > p$ se cumple $|x_p - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|y_p - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

A partir de $x_p \geqslant y_p + 2 \cdot \varepsilon$, de $x_p - \dfrac{\varepsilon}{2} < x_n$ y de $y_p > y_n - \dfrac{\varepsilon}{2}$, se obtiene:

$$x_n > x_p - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant (y_p + 2\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} = y_p + \frac{3\varepsilon}{2} > (y_n) - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon}{2} = y_n + \varepsilon \implies \boxed{x_n > y_n + \varepsilon}$$

Así, por **Definición 46**, se concluye que $\boxed{y <_c x}$. Si reordenamos la expresión obtenida, vemos que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple $y_n < x_n - \varepsilon < x_n + \varepsilon$, por lo que se cumple la negación de la **Definición 46** y se cumple $\boxed{\sim (x <_c y)}$.

Si ahora se supone que $\boxed{x_p < y_p}$, se obtendrá que $x <_c y$ y $\sim (y <_c x)$ $\square$.

<u>TEOREMA 41A</u>. Si x, y son sucesiones racionales de Cauchy, entonces $x <_c y \implies \sim (y <_c x)$.

Demostración: Como $x <_c y$, es inmediato que $\sim (x \simeq_c y) \wedge \sim (y <_c x)$, lo que demuestra lo pedido $\square$.

<u>TEOREMA 41B</u>. Para x, y, z sucesiones racionales de Cauchy, $x <_c y \wedge y <_c z \implies x <_c z$.

Demostración: Por hipótesis, existen $\delta_1 > 0$ y $N_1 \in \mathbb{N}$ tales que $n > N_1 \implies y_n > x_n + \delta_1$ y, asimismo, existen $\delta_2 > 0$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n > N_2 \implies z_n > y_n + \delta_2$.

Haciendo $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se obtiene para $n > N$:

$$z_n > y_n + \delta_2 > (x_n + \delta_1) + \delta_2 = x_n + (\delta_1 + \delta_2) \implies \boxed{x <_c z} \quad \square.$$

<u>TEOREMA 42A</u>. Si x, y, u, v sucesiones racionales de Cauchy tales que $x \simeq_c u \wedge y \simeq_c v \wedge x <_c y$, entonces $u <_c v$.

Demostración: De las hipótesis se obtiene que:

$$\boxed{x \simeq_c u} \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})(n > N_1 \implies |x_n - u_n| < \varepsilon_1)$$
$$\boxed{y \simeq_c v} \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})(n > N_2 \implies |y_n - v_n| < \varepsilon_2)$$
$$\boxed{x <_c y} \iff (\exists \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0)(\exists N_3 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})(n > N_3 \implies y_n > x_n + \delta)$$

Entonces, si hacemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2, N_3\}$, se obtiene para $n > N$:

$$v_n > y_n + \varepsilon_2 > (x_n + \delta) + \varepsilon_2 > (u_n + \varepsilon_1) + \delta + \varepsilon_2 \iff v_n > u_n + (\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \iff \boxed{u <_c v} \quad \square.$$

<u>TEOREMA 42B</u>. Si x, y, u, v sucesiones racionales de Cauchy tales que $x \simeq_c u \wedge y \simeq_c v$, entonces $x + y \simeq_c u + v$.

Demostración: De las hipótesis se obtiene que:

$$\boxed{x \simeq_c u} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > N_1 \implies |x_n - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\boxed{y \simeq_c v} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > N_2 \implies |y_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Entonces, si hacemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se obtiene para $n > N$:

$$|(x_n + y_n) - (u_n + v_n)| = |(x_n - u_n) + (y_n - v_n)| \leqslant |x_n - u_n| + |y_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto, las sucesiones $x + y, u + v$ son equivalentes (es decir, $x + y \simeq_c u + v$) $\square$.

<u>TEOREMA 42C</u>. Si x, y, u, v sucesiones racionales de Cauchy tales que $x \simeq_c u \wedge y \simeq_c v$, entonces $x \cdot y \simeq_c u \cdot v$.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por **<u>Teorema 37</u>**, existen $\delta_x, \delta_y, \delta_u, \delta_v$ tales que $(\forall n \in \mathbb{N})(|x_n| < \delta_x \wedge |y_n| < \delta_y \wedge |u_n| < \delta_u \wedge |v_n| < \delta_v)$. Desde aquí, consideramos $\delta = \text{máx}\{\delta_x, \delta_y, \delta_u, \delta_v\}$.

Ahora, de las hipótesis se obtiene que:

$$\boxed{x \simeq_c u} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > N_1 \implies |x_n - u_n| < \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)$$
$$\boxed{y \simeq_c v} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > N_2 \implies |y_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)$$

Entonces, si hacemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se obtiene para $n > N$:

$$|x_n \cdot y_n - u_n \cdot v_n| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot v_n + x_n \cdot v_n - u_n \cdot v_n| = |x_n \cdot (y_n - v_n) + v_n \cdot (x_n - u_n)|$$
$$\leqslant |x_n \cdot (y_n - v_n)| + |v_n \cdot (x_n - u_n)| < \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2\delta} + \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2\delta} = \varepsilon$$

Por lo tanto, las sucesiones $x \cdot y, u \cdot v$ son equivalentes (es decir, $x \cdot y \simeq_c u \cdot v$) $\square$.

13.4. Números Reales $\mathbb{R}$ sin completitud (Teoremas 43−46)

Tal como los elementos de $\mathbf{Nr}$ corresponden a clases de equivalencia de elementos de $\mathbf{Fr}$ y los elementos de $\mathbb{Q}$ corresponden a clases de equivalencia de elementos de $\mathbf{Sb}$, ahora se definirán los números reales $\mathbb{R}$ como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.

Dado que los Teoremas contenidos aquí son abiertamente similares a los que ya se han demostrado, solamente se enuncian los Teoremas, buscando que los demuestren de forma autónoma.

DEFINICIÓN 47: Si p es una sucesión racional de Cauchy (digamos $p \in \mathrm{Sc}$), entonces la clase de equivalencia de p bajo $\simeq_c$ es: $\boxed{[p]_c = \{\, q \in \mathbf{Sc} \mid q \simeq_c p \}}$

DEFINICIÓN 48: $\boxed{\mathbb{R} = \{\, x \mid (\exists p \in \mathbf{Sc}) : (x = [p]_c) \}}$

TEOREMA 43. $\mathbb{R}$ es una partición disjunta del conjunto Sc. En otras palabras, $\boxed{\mathbb{R} = \mathbf{Sc}/\simeq_c}$.

DEFINICIÓN 49: (Orden en $\mathbb{R}$). Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces: $\boxed{x <_r y \iff p \in [p]_c \ \wedge\ q \in [q]_c \ \wedge\ p <_c q}$

DEFINICIÓN 50 y 51: (Suma en $\mathbb{R}$). Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\boxed{x +_r y = z \iff p \in [p]_c \ \wedge\ q \in [q]_c \ \wedge\ s \in [s]_c \ \wedge\ p +_c q \simeq_c s}$$

Haciendo $x = [p]_c, y = [q]_c, z = [s]_c$, como $s \simeq_c p + q$, se obtiene $\boxed{[p]_c + [q]_c = [p+q]_c}$.

TEOREMA 44. La operación $+_r$ está bien definida.

DEFINICIÓN 52 y 53: (Producto en $\mathbb{R}$). Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\boxed{x \bullet_r y = z \iff p \in [p]_c \ \wedge\ q \in [q]_c \ \wedge\ s \in [s]_c \ \wedge\ p \bullet_c q \simeq_c s}$$

Haciendo $x = [p]_c, y = [q]_c, z = [s]_c$, como $s \simeq_c p \cdot q$, se obtiene $\boxed{[p]_c \cdot [q]_c = [p \cdot q]_c}$.

TEOREMA 45. La operación $\bullet_r$ está bien definida.

DEFINICIÓN 54 y 55: Neutros en $(\mathbb{R}, +_r, \bullet_r)$. $\boxed{0_r = [\langle 0, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle]_c \ ,\ 1_r = [\langle 1, 1, \ldots, 1, \ldots \rangle]_c}$

TEOREMA 46. Para $(\mathbb{R}, +_r, \bullet_r, <_r)$, se cumplen las siguientes afirmaciones con $x, y, z \in \mathbb{R}$:

46A. $x + y = y + x$

46B. $x \cdot y = y \cdot x$

46C. $(x + y) + z = x + (y + z)$

46D. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

46E. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

46F. $x + 0_r = x$

46G. $x \cdot 1_r = x$

46H. $(\forall x)(\exists y) \ :\ (x + y = 0)$

46I. Si $0_r \neq y$, entonces $(\exists z \in \mathbb{R}) \ :\ (x = y \cdot z)$

46J. $x <_r y \implies \sim (y <_r x)$

46K. $x <_r y \ \wedge\ y <_r z \implies x <_r z$

46L. $x \neq y \implies x <_r y \ \vee\ y <_r x$

46M. $x <_r y \implies x + z <_r y + z$

46N. $x <_r y \ \wedge\ 0 <_r z \implies x \cdot z <_r y \cdot z$

46Ñ. $0_r \neq 1_r$

13.5. Ejercicios Propuestos

13A. Si $x \in \mathbb{Q}$, demostrar que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

13B. Si $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $y \geqslant 0$, demostrar que $|x| < y \iff -y < x < y$.

13C. Usando la Definición 37, demostrar que para x, y racionales positivos se cumple:

a. $\lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

b. $\lfloor x \cdot y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$

c. $\lceil x + y \rceil \leqslant \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

d. $\lceil x \cdot y \rceil \leqslant \lceil x \rceil \cdot \lceil y \rceil$

13D. Dados $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $|x - y| = |y - x|$.

13E. Dada la sucesión x definida por $x_0 = 0 \ \wedge\ x_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2}$. Demostrar que x es sucesión racional de Cauchy.