22202 Álgebra I – Ayudantía 11

Homomorfismo de Grupos

Martes 19 de Enero de 2021

11.1. Definiciones

- Sean $(G_1, *)$ y $(G_2, \#)$ grupos y $f : G_1 \longrightarrow G_2$ función. Se dice que f es **homomorfismo de grupos** si y sólo si:

$$\boxed{\forall x, y \in G_1 \ (\ f(x * y) = f(x) \# f(y)\ )}$$

- Observaciones:

  - $\boxed{f(e_1) = e_2}$, pues: $f(e_1) = f(e_1 * e_1) = f(e_1) \# f(e_1) \implies \boxed{e_2 = f(e_1)}$
  - $\boxed{f(x)^{-1} = f(x^{-1})}$, pues: $f(x^{-1}) \# f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e_1) = e_2 \implies \boxed{f(x)^{-1} = f(x^{-1})}$

- Sea $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo. Se definen los conjuntos:

  - **Núcleo o Kernel de f:** $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \ = \ \{x \in G_1 \ : \ f(x) = e_2\}}$ (preimágenes del neutro de G_2)
  - **Imagen o Recorrido de f:** $\boxed{\mathrm{Im}(f) \ = \ \{y \in G_2 \ : \ \exists x \in G_1(\ y = f(x)\ )\}}$

- **Teorema:** f es inyectiva $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$
Demostración: $(\implies)$ Suponer que f es inyectiva. Veamos qué elementos de G_1 están en $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\implies f(x) = e_2 \\ (f(e_1) = e_2) &\implies f(x) = f(e_1) \\ (f \text{ inyectiva}) &\implies x = e_1 \qquad\qquad \therefore, \ \boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}} \end{aligned}$$

$(\impliedby)$ Suponer que $\mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies f(x) \# f(y)^{-1} = f(y) \# f(y)^{-1} \\ &\implies f(x) \# f(y^{-1}) = e_2 \\ &\implies f(x * y^{-1}) = e_2 \\ &\implies x * y^{-1} = e_1 \\ &\implies x * (y^{-1} * y) = e_1 * y \\ &\implies x = y \qquad\qquad \therefore, \ \boxed{f \text{ es inyectiva}} \end{aligned}$$

11.2. Ejercicios propuestos

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + 2y; 3x - y)$. Considerar la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$:
   a. Demostrar que f es homomorfismo.
   b. Determinar $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x - y; z)$. Considerar la suma de vectores en $\mathbb{R}^3$:
   a. Demostrar que f es homomorfismo.
   b. Determinar $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Considerar que $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de 2×2 con coeficientes reales:

$$\boxed{\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ , \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}}$$

   Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, b - a, c - b, d - a)$. Considerar la suma de matrices en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:
   a. Demostrar que f es homomorfismo.
   b. Determinar $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - b & b \\ c - b & d - a \end{bmatrix}$
   a. Demostrar que f es homomorfismo.
   b. Demostrar que f es inyectiva.

5. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$. Considerar la suma usual en $\mathbb{R}$:
   a. Demostrar que f es homomorfismo.
   b. Demostrar que f NO es inyectiva.

6. Considerar que $\mathbb{R}_2[x]$ es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 2:

$$\boxed{\mathbb{R}_2[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}}$$

   Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f(a, b, c) = a + bx + cx^2$. Considerar la suma de polinomios:
   a. Demostrar que f es homomorfismo.
   b. Demostrar que f es inyectiva.

7. Dado $n \in \mathbb{Z}$, sea $G_n : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $G_n(x) = x^{2n}$.
   Considerar el producto usual de $\mathbb{R} - \{0\}$:
   a. Demostrar que G_n es homomorfismo.
   b. Determinar $\mathrm{Ker}(G_n)$ e $\mathrm{Im}(G_n)$.

11.3. Algunas soluciones

1a. $$\begin{aligned} f((x,y)+(z,w)) &= f(x+z,y+w) = ((x+z)+2(y+w);3(x+z)-(y+w)) \\ &= (x+2y+z+w;3x-y+3z-w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y)+f(z,w) &= (x+2y;3x-y)+(z+2w;3z-w) = ((x+2y)+(z+2w);(3x-y)+(3z-w)) \\ &= (x+2y+z+w;3x-y+3z-w) \end{aligned}$$

1b. $$\begin{aligned} (a,b)\in \mathrm{Ker}(f) &\Longrightarrow f(a,b)=(0,0) \\ &\Longrightarrow (a+2b;3a-b)=(0,0) \\ &\Longrightarrow a+2b=0 \ \wedge \ 3a-b=0 \\ &\Longrightarrow a=-2b \ \wedge \ 3a=b \\ &\Longrightarrow a=-2(3a) \ \wedge \ 3a=b \\ &\Longrightarrow a=-6a) \ \wedge \ 3a=b \\ &\Longrightarrow 5a=0 \ \wedge \ 3a=b \\ &\Longrightarrow a=0 \ \wedge \ 3a=b \\ &\Longrightarrow a=0 \ \wedge \ 0=b \qquad \therefore,\ \mathrm{Ker}(f)=\{(0,0)\} \end{aligned}$$

4a. $$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) &= f(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} (a+e)-(b+f) & b+f \\ (c+g)-(b+f) & (d+h)-(a+e) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a-b+e-f & b+f \\ -b+c-f+g & -a+d-e+h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a-b & b \\ c-b & d-a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e-f & f \\ g-f & h-e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a-b)+(e-f) & b+f \\ (c-b)+(g-f) & (d-a)+(h-e) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a-b+e-f & b+f \\ -b+c-f+g & -a+d-e+h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4b. $$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in \mathrm{Ker}(f) &\Longrightarrow f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{bmatrix} a-b & b \\ c-b & d-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Longrightarrow a-b=0 \ \wedge \ b=0 \ \wedge \ c-b=0 \ \wedge \ d-a=0 \\ &\Longrightarrow a=b=0 \ \wedge \ b=0 \ \wedge \ c=b=0 \ \wedge \ d=a \\ &\Longrightarrow a=b=c=d=0 \\ &\Longrightarrow \ \mathrm{Ker}(f)=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \qquad \therefore,\ f \text{ es inyectiva} \end{aligned}$$

7a. $G_n(xy)=(xy)^{2n} \ \wedge \ G_n(x)G_n(y)=x^{2n}\cdot y^{2n}=(xy)^{2n}$

7b. $x\in \mathrm{Ker}(G_n) \ \Rightarrow \ x^{2n}=1=x^0 \ \Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker}(G_n)=\{1\}}$

$y\in \mathrm{Im}(G_n) \ \Rightarrow \ y=x^{2n}=(x^2)^n>0 \ \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im}(G_n)=\mathbb{R}^+}$