UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22203 Matemática Básica – Ayudantía 09

Valor Absoluto e Inecuaciones

Semana del 31 de Agosto de 2020

9.1. Definiciones de Valor Absoluto

***Definición 1*: El valor absoluto de un número real corresponde a la distancia que lo separa del neutro aditivo**.

Esta primera definición es demasiado dispersa, pues se hace necesario comprender bien el concepto de distancia en Matemáticas, el cual lo comprenderemos recién en Álgebra III.

***Definición 2*: El valor absoluto de un número real a es igual a la raíz cuadrada del cuadrado del mismo número**; es decir:

$$\boxed{|a| \;=\; \sqrt{a^2}}$$

Esta segunda definición nos entrega una manera práctica de calcular el valor absoluto; sin embargo, suele conducir a errores cuando se trata de inecuaciones con valor absoluto y no se dominan las propiedades de la raíz cuadrada.

***Definición 3*: El valor absoluto de un número real a es una función** cuya expresión es:

$$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\;\; f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}} \tag{I}$$

Esta definición evita todas las problemáticas anteriores, ya que permite resolver correctamente inecuaciones con valor absoluto.

9.2. Ecuaciones con Valor Absoluto

Usando la ***Definición 1***, podemos ver que la ecuación $|x| = 5$ tiene dos soluciones: -5 y 5, pues ambos números están a la misma distancia del cero.

Usando la ***Definición 2***, podemos analizar si esto es correcto:

$$x=5 \;\to\; |5|=\sqrt{(5)^2}=\sqrt{25}=5 \quad \square. \qquad\qquad x=-5 \;\to\; |-5|=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5 \quad \square.$$

En este caso, -5 y 5 tienen el mismo valor absoluto porque $(-5)^2 = 5^2 = 25$.

Finalmente, usando la ***Definición 3***, vemos que:

- Como $5 \geqslant 0$, entonces $|5| = 5$.
- Como $-5 < 0$, entonces $|-5| = -(-5) = 5$.

Entonces, al resolver una ecuación con valor absoluto, siempre tenemos que considerar los dos tramos de la función.

Ejemplo 1: Resolver $|x+4| = 13$

Solución: <u>**Caso 1**</u> $(x+4 \geqslant 0) \Longrightarrow x \geqslant -4$

$$|x+4| = 13 \implies x+4 = 13 \implies \boxed{x = 9}$$

<u>**Caso 2**</u> $(x+4 < 0) \Longrightarrow x < -4$

$$|x+4| = 13 \implies \boxed{-(x+4) = 13 \implies x+4 = -13} \implies \boxed{x = -17}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{-17, 9\}$ $\square$.

Ejemplo 2: Resolver $|x^2 - 2x| = 3$

Solución: <u>**Caso 1**</u> $(x^2 - 2x \geqslant 0) \Longrightarrow x(x-2) \geqslant 0 \Longrightarrow (x \geqslant 2 \ \vee \ x \leqslant 0)$

$$|x^2 - 2x| = 3 \implies x^2 - 2x = 3 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (x+1)(x-3) = 0 \implies \boxed{x = -1 \ \vee x = 3}$$

<u>**Caso 2**</u> $(x^2 - 2x < 0) \Longrightarrow x(x-2) < 0 \Longrightarrow (0 < x < 2)$

$$|x^2 - 2x| = 3 \implies x^2 - 2x = -3 \implies x^2 - 2x + 3 = 0 \implies \Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{-1, 3\}$ $\square$.

9.3. Ejercicios de Ecuaciones con Valor Absoluto

1. $|2x| = 6$
2. $|2x+3| = 5$
3. $|2x-3| = 5$
4. $|3x+1| = 5$
5. $|1-4t| = 5$
6. $|1-2z| = -3$
7. $\frac{2}{3}|x| = 8$
8. $\left|\frac{x}{3} + \frac{2}{5}\right| = 2$
9. $|x^2 - 4| = 0$
10. $|x^2 + x| = 12$
11. $|x^2 + 3x - 2| = 2$
12. $|x^2 + 1| = |2x|$

9.4. Inecuaciones con Valor Absoluto

Para introducirnos bien en el manejo de este tipo de inecuaciones, revisaremos algunos ejemplos:

Ejemplo 3: Resolver $|x| < 4$

Solución: Debemos traer a colación la ***Definición 3*** del Valor Absoluto, que implica analizar los dos tramos de la función: $x \geqslant 0$ y $x < 0$.

<u>**Caso 1**</u>

$$|x| < 4 \ \wedge \ x \geqslant 0 \implies x < 4 \ \wedge x \geqslant 0 \implies \boxed{0 \leqslant x < 4}$$

<u>**Caso 2**</u>

$$|x| < 4 \ \wedge \ x < 0 \implies -x < 4 \ \wedge x < 0 \implies x > -4 \ \wedge x < 0 \implies \boxed{-4 < x < 0}$$

Luego, los valores de x que solucionan la inecuación son tales que $-4 < x < 4$; por lo tanto, $S =]-4, 4[$ $\square$.

En general, siempre que tengamos $|x| < a$, se cumplirá $-a < x < a$ y $S =]-a, a[$. De forma similar, si $|x| \leqslant a$, se cumplirá $-a \leqslant x \leqslant a$ y $S = [-a, a]$.

Ejemplo 4: Resolver $|x| > 3$

Solución: Nuevamente analizaremos los dos tramos de la función: $x \geqslant 0$ y $x < 0$.

Caso 1

$$|x| > 3 \ \wedge \ x \geqslant 0 \implies x > 3 \ \wedge x \geqslant 0 \implies \boxed{3 < x}$$

Caso 2

$$|x| > 3 \ \wedge \ x < 0 \implies -x > 3 \ \wedge x < 0 \implies x < -3 \ \wedge x < 0 \implies \boxed{x < -3}$$

Luego, los valores de x que solucionan la inecuación son tales que $x < -3 \ \vee 3 < x$; por lo tanto, $S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$ $\square$.

En general, siempre que tengamos $|x| > a$, se cumplirá $x < -a \vee a < x$ y $S =]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$. De forma similar, si $|x| \geqslant a$, se cumplirá $x \leqslant -a \vee a \leqslant x$ y $S =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Ejemplo 5: Resolver $|2x + 4| \leqslant 3$

Solución: La resolución del ejercicio comienza de manera similar al Ejemplo 3, considerando los dos casos:

Caso 1: $2x + 4 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ 2x \geqslant -4 \ \Leftrightarrow \ \boxed{x \geqslant -2}$

$$|2x + 4| \leqslant 3 \implies 2x + 4 \leqslant 3 \implies 2x \leqslant -1 \implies \boxed{x \leqslant -1/2}$$

Caso 2: $2x + 4 < 0 \ \Leftrightarrow \ 2x < -4 \ \Leftrightarrow \ \boxed{x < -2}$

$$|2x + 4| \leqslant 3 \implies -(2x + 4) \leqslant 3 \implies 2x + 4 \geqslant -3 \implies 2x \geqslant -7 \implies \boxed{x \geqslant -7/2}$$

En cada uno de los casos, ***se deben cumplir ambas condiciones al mismo tiempo***. En el primer caso, se obtiene $-2 \leqslant x \leqslant -1/2$ y $\boxed{S_1 = [-2, -1/2]}$. En el segundo caso, se obtiene $-7/2 \leqslant x < -2$ y $\boxed{S_2 = [-7/2, -2[}$.

Por lo tanto, $\boxed{S = S_1 \cup S_2 = [-7/2, -1/2]}$ $\square$.

Ejemplo 6: Resolver $|2x - 5| > 3$

Solución: Este ejercicio se resuelve similar al Ejemplo 4, considerando los dos casos:

Caso 1: $2x - 5 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ 2x \geqslant 5 \ \Leftrightarrow \ \boxed{x \geqslant 5/2}$

$$|2x - 5| > 3 \implies 2x - 5 > 3 \implies 2x > 8 \implies \boxed{x > 4}$$

Caso 2: $2x - 5 < 0 \ \Leftrightarrow \ 2x < 5 \ \Leftrightarrow \ \boxed{x < 5/2}$

$$|2x - 5| > 3 \implies -(2x - 5) > 3 \implies 2x - 5 < -3 \implies 2x < 2 \implies \boxed{x < 1}$$

En el primer caso, se obtiene $4 < x$ y $\boxed{S_1 =]4, +\infty[}$. En el segundo caso, se obtiene $x < 1$ y $\boxed{S_2 =]-\infty, 1[}$.

Por lo tanto, $\boxed{S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[}$ $\square$.

Ejemplo 7: Resolver $|x+2| > |3-x|$

Solución: En este caso, como se trata de dos valores absolutos, se tendrán dos casos por cada uno; es decir, **se deben considerar cuatro casos**:

$$\underline{\textbf{Caso 1:}}\ x+2 \geqslant 0 \ \wedge\ 3-x \geqslant 0 \Leftrightarrow\ x \geqslant -2 \ \wedge\ 3 \geqslant x \ \Leftrightarrow \boxed{-2 \leqslant x \leqslant 3}$$

$$|x+2| > |3-x| \implies x+2 > 3-x \implies 2x > 1 \implies \boxed{x > 1/2}$$

$$\underline{\textbf{Caso 2:}}\ x+2 \geqslant 0 \ \wedge\ 3-x < 0 \Leftrightarrow\ x \geqslant -2 \ \wedge\ 3 < x \ \Leftrightarrow \boxed{3 < x}$$

$$|x+2| > |3-x| \implies x+2 > -(3-x) \implies \cancel{x}+2 > \cancel{x}-3 \implies \boxed{2 > -3}\ \text{(T)}$$

$$\underline{\textbf{Caso 3:}}\ x+2 < 0 \ \wedge\ 3-x \geqslant 0 \Leftrightarrow\ x < -2 \ \wedge\ 3 \geqslant x \ \Leftrightarrow \boxed{x < -2}$$

$$|x+2| > |3-x| \implies -(x+2) > 3-x \implies \cancel{x}+2 < \cancel{x}-3 \implies \boxed{2 < -3}\ \text{(C)}$$

$$\underline{\textbf{Caso 4:}}\ x+2 < 0 \ \wedge\ 3-x < 0 \Leftrightarrow\ x < -2 \ \wedge\ 3 < x \ \Leftrightarrow \boxed{\varnothing}$$

En el primer caso, se obtiene $1/2 < x \leqslant 3$ y $\boxed{S_1 =]1/2; 3]}$. En el segundo caso, se obtiene $3 < x$ y $\boxed{S_2 =]3, +\infty[}$.

En el tercer caso, se obtiene una contradicción, por lo que $S_3 = \varnothing$. En el cuarto caso, se obtiene una intersección vacía, por lo que $S_4 = \varnothing$.

Por lo tanto, $\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 =]1/2, +\infty[}$ $\square$.

9.5. Ejercicios de Inecuaciones con Valor Absoluto

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $|2x| < 8$
2. $|3x| > 12$
3. $|x-2| < 1$
4. $|3t-2| \leqslant 4$
5. $|x-3| \geqslant 2$
6. $|3x+4| < 1/2$
7. $|1-2x| < 1/3$
8. $|2x-5| \geqslant 7$
9. $|3x+1| \geqslant 2$
10. $x - |x| > 2$
11. $|x-4| > x-2$
12. $|x-7| < |5x-25|$
13. $\left|\dfrac{x^2-x}{x^2-4}\right| < 1$
14. Si $a > 0$, demuestre que el conjunto solución de $x^2 < a$ es $S =]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[$.
15. Si $a > 0$, demuestre que el conjunto solución de $x^2 > a$ es $S =]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[$.