Axioma de distributividad

$$a(b+c) = ab + ac$$

1. Leido a(b+c)= ab + ac
   es la propiedad de distributividad.

2. Leido ab + ac = a(b+c)
   es la propiedad de factorización .

Factorizar para resolver ecuaciones e inecuaciones

Paso 1 Escribir la ecuación $\mathbf{p(x) = 0}$ o la inecuación

$$\mathbf{p(x)} \begin{cases} \leq 0 \\ < 0 \\ > 0 \\ \geq 0. \end{cases}$$

Paso 2 Factorizar $\mathbf{p(x)}$.

Paso 3 Aplicar el teorema de productos nulos o el teorema de los signos de un producto, según el caso.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 = 1 - x$.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\text{Discriminante} = \Delta = 1^2 - 4(-1) = 5 > 0$$

La ecuación tiene dos raices o soluciones reales distintas. Supongamos por simplicidad que ellas son $r, s; r < s$

$$x^2 + x - 1 = (x - r)(x - s) = 0.$$

Cálculo de las soluciones: $\frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \begin{cases} r = & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ s = & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Ejemplo 2
Resolver la inecuación
$x^2 \geq -x + 1.$

La inecuación se escribe de la forma:

$$x^2 + x - 1 \geq 0$$

Para factoriza el polinomio, se debe resolver la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$, cuyas soluciones conocemos, del ejemplo anterior.

$$x^2 + x - 1 = (x - r)(x - s) \geq 0.$$

Aplicamos el Teorema de los signos de un producto. Por ser el producto no negativo, ambos factores tienen el mismo signo.

Factores positivos

$$x - r \geq 0 \iff x \geq r$$
$$x - s \geq 0 \iff x \geq s$$

Los números que cumplen las dos condiciones son $x > s = \text{máx}\{r, s\}$.

Factores negativos

$$x - r \leq 0 \iff x \leq r$$
$$x - s \leq 0 \iff x \leq s$$

Los números que cumplen las dos condiciones son $x < r = \text{mín}\{r, s\}$.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación

$$\frac{x}{x+1} = 2$$

Bajo la hipótesis $x \neq -1$

$$\frac{x}{x+1} = 2 \iff x = 2(x+1)$$

$$\iff x + 2 = 0 \iff x = -2.$$

Ejemplo 4

Resolver la inecuación

$$\frac{x}{x+1} > 2.$$

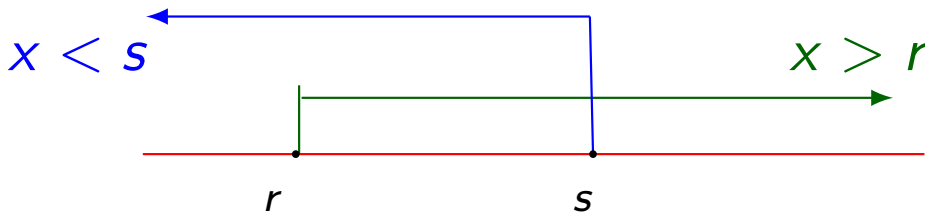
Esta inecuación tiene el factor $(x+1)$ en el denominador, como al multiplicar una inecuación por un número, importa el signo. Por esta razón, se multiplica por el cuadrado del denominador.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1}(x+1)^2 &> 2(x+1)^2, \\ x(x+1) &> 2(x^2+2x+1) \\ x^2+x &> 2x^2+4x+2 \\ x^2-3x+2<0 \iff (x+1)(x+2) &< 0 \end{aligned}$$

Un producto es negativo si y solo si los factores tienen signos diferentes. Sean $r=-2, \quad s=-1$.

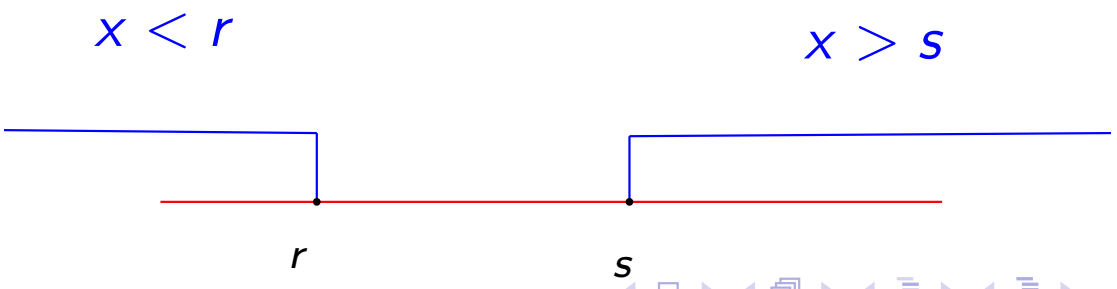
Primer caso $x < s, \quad x > r$

La solución es $r < x < s$.



Segundo caso $x > s, \quad x < r$

No existen tales $x \in \mathbb{R}$. Esta opción no da soluciones.



Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$\frac{x^2}{x+1} = 2$$

$$\frac{x^2}{x+1} = 2 \Longleftrightarrow x^2 = 2x + 2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

el discriminante $\Delta = (-2)^2 - 4(-2) = 12 > 0$.

$$r = 2 - \sqrt{3}, \quad s = 2 + \sqrt{3},$$

La ecuacion tiene dos raíces reales distintas: r, s.

Ejemplo 6

Resolver la inecuación

$$\frac{x^2}{x+1} > 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x+1}(x+1)^2 &> 2(x+1)^2, \\
x^2(x+1) &> 2(x^2+2x+1) \\
x^3+x^2 &> 2x^2+4x+2 \\
x^3-x^2-4x-2 &> 0.
\end{aligned}$$

Para factorizar, se debe factorizar un polinomio completo de tercer grado.

Este es un nuevo tema.