Coordenadas Polares (2° Parte)

Edgard A. Araya C.
Cálculo III - Ay. 03
29/Abril/2019

Parametrización de curvas dadas en Coordenadas Polares

La idea de fondo es encontrar $x(\theta)$ e $y(\theta)$ a partir de $r(\theta)$.

$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad y \quad r = r(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x(\theta) &= r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) &= r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}}$$

① Parametrizar las siguientes curvas:

Ⓐ $r = \theta$ (Espiral)

Ⓑ $r = e^{\theta/10}$ (Espiral Logarítmica)

Ⓒ $r = -1 + \mathrm{sen}\,\theta$ (Cardioide)

Ⓓ $r = \mathrm{sen}\,2\theta$ (Rosa de 4 pétalos).

Sol: Ⓐ $\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos\theta \\ y(\theta) = \theta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases} x(\theta) = e^{\theta/10}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{\theta/10}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

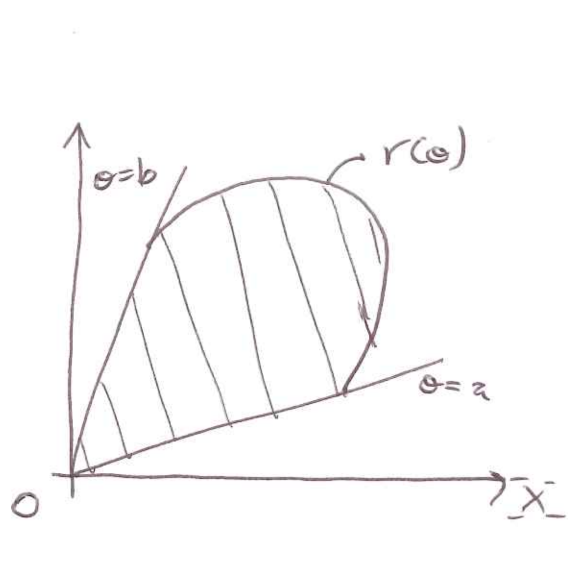
Ⓒ $\begin{cases} x(\theta) = (-1+\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (-1+\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases} x(\theta) = \mathrm{sen}\,2\theta\cos\theta \\ y(\theta) = \mathrm{sen}\,2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

Obs: Las expresiones del caso Ⓒ y Ⓓ se pueden seguir desarrollando con propiedades de Trigonometría, pero en este momento no es necesario hacerlo.

Integración en coordenadas polares

Se busca el área entre el polo O, las rectas $\theta = a$, $\theta = b$ y la curva $r(\theta)$.

$$\boxed{I = \int_a^b \frac{1}{2}(r(\theta))^2\,d\theta}$$



Ej.: ① Determinar el área encerrada por la cardioide $r(\theta) = 2(1+\cos\theta)$

Sol: $$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(2(1+\cos\theta))^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta \quad / \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(2+4\cos\theta+\cancel{2}\frac{(1+\cos 2\theta)}{\cancel{2}}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(3+4\cos\theta+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$d(2\theta) = 2d\theta$$

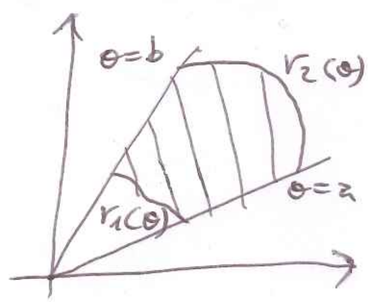
$$= \int_0^{2\pi} 3\, d\theta + 4\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= 3\theta\Big|_0^{2\pi} + 4\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 3(2\pi - 0) + 4(\overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}\,2\pi}} - \overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}\,0}}) + \frac{1}{2}(\overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}\,4\pi}} - \overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}\,0}})$$

$$= 6\pi$$

Obs: Si el área está encerrada entre $\theta = a$, $\theta = b$ y las curvas $r_1(\theta)$ y $r_2(\theta)$, entonces $\boxed{A = \frac{1}{2}\int_a^b (r_2^2 - r_1^2)\, d\theta}$



Longitud de arco en Polares

Dada la curva $r(\theta)$, con $a \le \theta \le b$. De la expresión de longitud de arco con ecuaciones paramétricas, se tendrá:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \quad , \quad \begin{aligned} x(\theta) &= r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) &= r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\cos\theta - r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + r(\theta)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

Ej.: (2) Determinar la longitud de la cardioide $r(\theta) = 1 - \cos\theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Sol: $\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta \qquad / \; 1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta \qquad / \; \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \boxed{0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \pi}$$

$$= 2\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{2} \qquad / \; d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\left(\frac{\theta}{2}\right) = -4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -4\underbrace{\cos\pi}_{-1} + 4\underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$= 4 + 4 = 8$$

Ejercicios:

1. Calcular el área limitada por $r = 2\operatorname{sen}\theta$, $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.
2. Mismo para un pétalo de $r = \cos 3\theta$ (3 pétalos).
3. Región entre $r = 1$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$.
4. Región dentro de $r^2 = 6\cos 2\theta$ y fuera de $r = \sqrt{3}$.
5. Longitud de espiral $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq \sqrt{5}$.
6. Longitud de cardioide $r = 1 + \cos\theta$
7. Longitud de $r = \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2\theta}$, $0 \leq \theta \leq \sqrt{2}\pi$.