UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

22224 Geometría I - Ayudantía 01

Incidencia y Orden

Semana del 04 de Mayo de 2020

1.1. Axiomas de Incidencia del Plano de Hilbert

I-1 Dos puntos distintos $A \neq B$ determinan una única recta $l = \overleftrightarrow{AB}$

I-2 Toda recta queda determinada por dos puntos que pertenezcan a ella.

I-3 Existen al menos tres puntos no colineales (que no pertenecen a la misma recta). Esos tres puntos determinan al menos un plano.

I-4 Tres puntos no colineales determinan un único plano.

I-5 Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los puntos de la recta estarán en el mismo plano y, además, toda la recta pertenece al mismo plano.

I-6 Si un punto pertenece a dos planos, existe al menos otro punto que pertenece a los mismos dos planos.

I-7 Existen al menos cuatro puntos no coplanares (que no pertenecen al mismo plano).

1.2. Axiomas de Orden del Plano de Hilbert

O-1 Sean A, B, C puntos de una recta. Si B está entre A y C, entonces $A \neq B \neq C$ y B está entre C y A.

O-2 Sean A, C puntos de una recta. Si $A \neq C$, entonces existe B entre A y C y existe D tal que C está entre A y D.

O-3 Sean A, B, C puntos de una recta. Si $A \neq B \neq C$, entonces uno y solo uno de ellos está entre los otros dos.

O-4 Sean A, B, C, D puntos de una recta, entonces ellos siempre pueden ordenarse de modo que se cumpla:

- B entre A y C.
- B entre A y D.
- C entre A y D.
- C entre B y D.

O-5 (**Lados del plano respecto a** l) Sea l recta del plano y $A, B \notin l$. Entonces:

- A, B están **del mismo lado** de l si entre A y B no hay puntos de l.
- A, B están **del lado opuesto** de l si entre A y B hay al menos un punto de l.

1.3. Ejemplos de Demostraciones

1. Dos rectas diferentes se intersectan en a lo más un punto.

Demostración: Por Contradicción, supondremos que $l \neq m$ y se intersectan en dos (o más) puntos, digamos A y B. Por **I-2**, se tiene que $A, B \in l$, por lo que ellos definen a l, mientras que $A, B \in m$, por lo que ellos también definen a m. Pero por **I-1** se tiene que A y B pueden determinar una única recta, por lo que $l = m$. Esto contradice la hipótesis de que $l \neq m$ $\square$.

$\therefore$ **, dos rectas $l \neq m$ se intersectan en a lo más un punto**.

2. En un plano existen al menos tres rectas.

Demostración: Por **I-3**, en un plano existen al menos tres puntos no colineales, digamos $A \neq B \neq C$. En este caso, por **I-2** diremos $l = \overleftrightarrow{AB}$, $m = \overleftrightarrow{BC}$ y $n = \overleftrightarrow{AC}$.

Parece trivial que las tres rectas son distintas, pero ***hay que demostrarlo***. Por Contradicción, supondremos que $l = m$. Como l y m están definidas a partir de A, B, C, se tendría que $C \in l$ o bien que $A \in m$; luego, los tres puntos son colineales, lo que contradice nuestra hipótesis basada en **I-3**.

$\therefore$ **, en un plano existen al menos tres rectas**.

3. (Lados de la recta respecto a O)

Sea l recta del plano y $O \in l$. Entonces O separa la recta en dos conjuntos, tales que:

- **Si P, Q están en el mismo conjunto, entonces OPQ o OQP o PQO o QPO.**
- **Si P, Q no están en el mismo conjunto, entonces POQ o QOP.**

Demostración: Por **I-3**, existe un punto $A \notin l$. Por **I-2**, podemos definir $m = \overleftrightarrow{OA}$. Por **O-5**, la recta m divide el plano en dos lados; en particular, la recta m divide a la recta l en dos conjuntos (uno en cada lado del plano).

Ahora, el resto es utilizar los casos dados por **O-5**:

- Si P, Q están en el mismo conjunto, ello significa que están del mismo lado del plano respecto de m. De allí se tiene que entre ellos no hay puntos de m. En particular, O no está entre PyQ, dando lugar a cualquiera de las cuatro combinaciones posibles.
- Si P, Q están en conjuntos distintos, ello significa que están en lados distintos del plano respecto de m. Así, existe al menos un punto de m entre ellos. Como además todo esto se analiza para puntos de l, el único candidato que tenemos es O (por Teorema 1). Luego, O está entre P y Q, dando lugar a una de las dos combinaciones posibles $\square$.

$\therefore$ **, un punto O divide a una recta en dos conjuntos** (por ahora, llamaremos a estos conjuntos ***lados de l respecto de O***).

4. Entre dos puntos cualesquiera de una recta existen infinitos puntos.

Demostración: Sean A, B dos puntos de l. Por **O-2**, existe C entre A y B; luego, existe D entre A y C, y así sucesivamente.

Parece trivial que este razonamiento es infinito, pero ***hay que demostrarlo***. Supongamos que existen dos puntos X e Y entre los que no hay otros puntos. Esta sola suposición contradice a **O-2** $\square$.

$\therefore$ **, entre dos puntos A, B de una recta existen infinitos puntos.** (se define al segmento $\overline{AB}$ como el conjunto de puntos de l que están entre A y B, además de los mismos A y B).

5. Dados los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in l$, ellos se pueden ordenar de modo que: A_2 entre A_1 y A_3, A_3 entre A_2 y A_4, ... y A_{n-1} entre A_{n-2} y A_n.

Demostración: Al ser un resultado que involucra $n \in \mathbb{N}$ puntos, hay que pensar en demostrarlo **por Inducción sobre** n.

$p(n)$: Es posible ordenar los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in l$ como se describe.

$p(4)$: Debido a $\boxed{\textbf{O-4}}$, es posible ordenar los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 como se describe.

H.I. $p(k)$: Es posible ordenar los puntos $A_1, \ldots, A_k$ como se describe.
T.I. $p(k+1)$: Es posible ordenar los puntos $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$ como se describe.

Demostración: Para este punto A_{k+1} existen posibilidades finitas:

- A_{k+1} es tal que A_k está entre A_{k-1} y A_{k+1}
  En este caso, ya se tiene lo que se pide.

- A_{k+1} está entre A_{k-1} y A_k
  En este caso, bastaría con renombrar los puntos $A'_1 = A_1$,...,$A'_k = A_{k+1}$ y $A'_{k+1} = A_k$ y considerar el orden $A'_1, \ldots, A'_{k-1}, A'_k, A'_{k+1}$.

- En cualquier otro caso (es decir, A_{k+1} entre A_j y A_{j+1}, con j entre 1 y $k-1$), se puede renombrar los puntos de manera análoga al caso anterior, logrando obtener el orden deseado.

- A_{k+1} es tal que A_1 está entre A_{k+1} y A_2
  Nuevamente, basta con renombrar los puntos de la sucesión para conseguir el orden deseado.

$\therefore$ **, para todo $n \in \mathbb{N}$, dados los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in l$, ellos se pueden ordenar de modo que: A_2 entre A_1 y A_3, A_3 entre A_2 y A_4, ... y A_{n-1} entre A_{n-2} y A_n.**