22234 Fundamentos II – Ayudantía 11

Racionales no negativos (Teo. 1–25)

EDGARD ALEJANDRO ARAYA CARREÑO – edgard.araya@usach.cl

11.1. Fracciones no negativas $\mathbf{Fr}$ (Teoremas 1–7)

Entenderemos, por simplicidad, que <u>un número natural es un cardinal finito</u>.

<u>DEFINICIÓN 1:</u> x **es una fracción no negativa si y solo si** $(\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} - \{0\}) \ : \ [x = (m, n)]$.

<u>DEFINICIÓN 2:</u> Si $n \neq 0$**, entonces:** $\boxed{x = \dfrac{m}{n} = (m, n)}$

<u>DEFINICIÓN 3:</u> $\boxed{\mathbf{Fr} = \left\{ x \;\middle|\; (\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} - \{0\}) \ : \ x = \dfrac{m}{n} \right\}}$

<u>DEFINICIÓN 4:</u> La relación $\simeq_f$ **se define en** $\mathbf{Fr}$ **como:** $\boxed{\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1}$

<u>TEOREMA 1</u>. $\simeq_f$ **es una relación de equivalencia en** $\mathbf{Fr}$.

Demostración: Una relación de equivalencia debe ser refleja, simétrica y transitiva. Por **<u>Ejercicio 9A</u>**, la igualdad de cardinales es relación de equivalencia. Así, para $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Fr}$ se tiene $m \cdot n = m \cdot n$. Luego, por **<u>Definición 4</u>** se obtiene $\dfrac{m}{n} \simeq_f \dfrac{m}{n}$, por lo que $\simeq_f$ **es refleja**.

Ahora bien, si $\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2}$, por **<u>Definición 4</u>** se obtiene que $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$. De allí se sigue $m_2 \cdot n_1 = m_1 \cdot n_2$, lo que implica por **<u>Definición 4</u>** que $\dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1}{n_1}$. Por lo tanto, $\simeq_f$ **es simétrica**.

Por último, si $\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2} \ \wedge \ \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_3}{n_3}$, por **<u>Definición 4</u>** se obtiene que $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_2$. En este punto, debemos encontrar una forma de "conectar" estas dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
& m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_2 && / \textbf{ Ejercicio 9B} \\
\implies & (m_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = (m_2 \cdot n_1) \cdot n_3 \ \wedge \ (m_2 \cdot n_3) \cdot n_1 = (m_3 \cdot n_2) \cdot n_1 && / \textbf{ Teorema 60 Asoc.} \\
\implies & m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) = m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_3 \cdot n_1) = m_3 \cdot (n_2 \cdot n_1) && / \textbf{ Teorema 59 Conm.} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) = m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) = m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \textbf{ Ejercicio 9A} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) = m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \textbf{ Teorema 60 Asoc.} \\
\implies & (m_1 \cdot n_3) \cdot n_2 = (m_3 \cdot n_1) \cdot n_2 && / \textbf{ Ejercicio 9B} \\
\implies & m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1
\end{aligned}
$$

El resultado obtenido implica por **<u>Definición 4</u>** que $\dfrac{m_1}{n_1} \simeq_f \dfrac{m_3}{n_3}$. Por lo tanto, $\simeq_f$ **es transitiva**.

Finalmente, se concluye que $\simeq_f$ es una relación de equivalencia $\square$.

<u>TEOREMA 2</u>. Si $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Fr}$ **y** $p \neq 0$**, entonces** $\dfrac{m}{n} \simeq_f \dfrac{m \cdot p}{n \cdot p}$.

Demostración: Dados m, n, p, por **<u>Teorema 60 Asoc.</u>** se sabe que $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.

Ahora, por **<u>Teorema 60 Asoc.</u>** se sabe que $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.

Por otra parte, del **<u>Teorema 59 Conm.</u>** se sabe que $m \cdot (n \cdot p) = m \cdot (p \cdot n)$ y por **<u>Teorema 60 Asoc.</u>** se sabe que $m \cdot (p \cdot n) = (m \cdot p) \cdot n$; luego, aplicando Transitividad varias veces se obtiene $\boxed{m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot p) \cdot n}$. Por **<u>Definición 4</u>**, se concluye que $\dfrac{m}{n} \simeq_f \dfrac{m \cdot p}{n \cdot p}$ $\square$.

<u>DEFINICIÓN 5:</u> La relación $<_f$ se define en $\mathbf{Fr}$ como: $\boxed{\dfrac{m_1}{n_1} <_f \dfrac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1}$

<u>TEOREMA 3</u>. $<_f$ es un orden parcial estricto en $\mathbf{Fr}$.

Demostración: Un **orden parcial estricto** es una relación R que cumple:

- **Irrefleja:** $\sim (xRx)$.
- **Asimétrica:** $xRy \implies \sim (yRx)$
- **Transitiva**

Así, para $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Fr}$ por **<u>Teorema 77A</u>** se tiene $\sim (m \cdot n < m \cdot n)$. Luego, por **<u>Definición 5</u>** se obtiene $\sim \left(\dfrac{m}{n} <_f \dfrac{m}{n}\right)$, por lo que $<_f$ **es irrefleja**.

Ahora, si $\dfrac{m_1}{n_1} <_f \dfrac{m_2}{n_2}$, por **<u>Definición 5</u>** se obtiene que $m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1$. Por **<u>Teorema 77B</u>** se sigue $\sim (m_2 \cdot n_1 < m_1 \cdot n_2)$, y por **<u>Definición 5</u>** que $\sim \left(\dfrac{m_2}{n_2} <_f \dfrac{m_1}{n_1}\right)$. Por lo tanto, $<_f$ **es asimétrica**.

Por último, si $\dfrac{m_1}{n_1} <_f \dfrac{m_2}{n_2} \ \wedge \ \dfrac{m_2}{n_2} <_f \dfrac{m_3}{n_3}$, por **<u>Definición 5</u>** se obtiene que $m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_2$. Nuevamente debemos encontrar una forma de "conectar" estas dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
& m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_2 && / \textbf{ Ejercicio 9C} \\
\implies & (m_1 \cdot n_2) \cdot n_3 < (m_2 \cdot n_1) \cdot n_3 \ \wedge \ (m_2 \cdot n_3) \cdot n_1 < (m_3 \cdot n_2) \cdot n_1 && / \textbf{ Teorema 60 Asoc.} \\
\implies & m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) < m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_3 \cdot n_1) < m_3 \cdot (n_2 \cdot n_1) && / \textbf{ Teorema 59 Conm.} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) < m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) \ \wedge \ m_2 \cdot (n_1 \cdot n_3) < m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \textbf{ Teorema 77C} \\
\implies & m_1 \cdot (n_3 \cdot n_2) < m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2) && / \textbf{ Teorema 60 Asoc.} \\
\implies & (m_1 \cdot n_3) \cdot n_2 < (m_3 \cdot n_1) \cdot n_2 && / \textbf{ Ejercicio 9C} \\
\implies & m_1 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_1
\end{aligned}
$$

El resultado obtenido implica por **<u>Definición 5</u>** que $\dfrac{m_1}{n_1} <_f \dfrac{m_3}{n_3}$. Por lo tanto, $<_f$ **es transitiva**.

Finalmente, se concluye que $<_f$ es un orden parcial estricto $\square$.

<u>TEOREMA 4</u>. Si $x, y \in \mathbf{Fr}$, entonces $x <_f y \ \vee \ x \simeq_f y \ \vee \ y <_f x$.

Demostración: Definiendo $x = \dfrac{m_1}{n_1}$ e $y = \dfrac{m_2}{n_2}$, la proposición a demostrar equivale a:

$$m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \ \vee \ m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \ \vee \ m_2 \cdot n_1 < m_1 \cdot n_2$$

Definiendo $\mathcal{K}(A) = m_1 \cdot n_2$ y $\mathcal{K}(B) = m_2 \cdot n_1$, la proposición a demostrar es equivalente a:

$$\mathcal{K}(A) < \mathcal{K}(B) \ \vee \ \mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B) \ \vee \ \mathcal{K}(B) < \mathcal{K}(A)$$

A partir del **<u>Teorema 76</u>** y del **<u>Axioma de Cardinalidad</u>**, esto equivale a demostrar que:

$$A \prec B \ \vee \ A \approx B \ \vee \ B \prec A$$

Entendiendo siempre que los números naturales involucrados son cardinales finitos, eso significa que A es finito, por lo que la última proposición corresponde al **<u>Teorema 44</u>** (Tricotomía) $\square$.

<u>DEFINICIÓN 6:</u> La relación $>_f$ se define en $\mathbf{Fr}$ como:

$$\boxed{\frac{m_1}{n_1} >_f \frac{m_2}{n_2} \iff \frac{m_2}{n_2} <_f \frac{m_1}{n_1} \iff m_1 \cdot n_2 > m_2 \cdot n_1}$$

<u>TEOREMA 5</u>. Si $x \in \mathbf{Fr}$, entonces existe $y \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (x \simeq_f y) \ \wedge \ x <_f y$.

Demostración: Definimos $x = \dfrac{m_1}{n_1}$ e $y = \dfrac{m_2}{n_2}$. Por Contradicción, suponemos que para todo $y \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (x \simeq_f y)$ se cumple $x >_f y$. Por **<u>Definición 6</u>**, esto implica que $m_1 \cdot n_2 > m_2 \cdot n_1$. Si hacemos $p = m_1 \cdot n_2$ y $q = m_2 \cdot n_1$, esto implica que existe p tal que para todo q se cumple $p > q$. Esto contradice el **<u>Teorema 79</u>**, lo que demuestra lo pedido $\square$.

TEOREMA 6. Si $x, y \in \mathbf{Fr}$ y $x <_f y$, entonces existe $z \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (z \simeq_f x) \wedge \sim (z \simeq_f y)$ y $x <_f z <_f y$.

Demostración: Debemos entender que $x <_f z <_f y \iff x <_f z \wedge z <_f y$.

Dados $x, y \in \mathbf{Fr}$, por Contradicción, suponemos que $x <_f y$ y que para todo $z \in \mathbf{Fr}$ tal que $\sim (z \simeq_f x) \wedge \sim (z \simeq_f y)$ se cumple $\sim (x <_f z) \vee \sim (z <_f y)$. Por **Teorema 4** (Tricotomía), esto significa que $z <_f x \vee y <_f z$.

El primer caso indicaría que para todo $z \in \mathbf{Fr}$ ocurre $z <_f x$, lo que contradice el **Teorema 5**. Esto demuestra que $\boxed{x <_f z}$.

Ahora, definimos $y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$. Decir que $y <_f z$ equivale a decir, por **Definición 5**, que $m_2 \cdot n_3 < m_3 \cdot n_2$. Como lo anterior es válido para todo z, en particular debe ser válido para $z = 0$ (es decir, para $m_3 = 0$). Así, se obtiene $m_2 \cdot n_3 < 0 \cdot n_2$. Por **Ejercicio 9D**, se obtiene $m_2 \cdot n_3 < 0$, lo que contradice el **Ejercicio 9E**. Por lo tanto, se obtiene que $\boxed{z <_f y}$, concluyendo la demostración $\square$.

TEOREMA 7. Si $x, y, u, v \in \mathbf{Fr}$ son tales que $x <_f y$ y $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces $u <_f v$.

Demostración: Definiendo $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, u = \dfrac{m_3}{n_3}, v = \dfrac{m_4}{n_4}$, de las hipótesis se obtiene por **Definición 4 y 5** que $m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \wedge m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1 \wedge m_2 \cdot n_4 = m_4 \cdot n_2$. Desarrollando la desigualdad, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 && / \textbf{ Ejercicio 9C} \\
\iff\ & m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \cdot n_3 && / \textbf{ Hipótesis} \\
\iff\ & m_3 \cdot \underline{n_1} \cdot n_2 < m_2 \cdot \underline{n_1} \cdot n_3 && / \textbf{ Ejercicio 9C} \\
\iff\ & m_3 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_3 && / \textbf{ Ejercicio 9C} \\
\iff\ & m_3 \cdot n_2 \cdot m_4 < m_2 \cdot n_3 \cdot m_4 && / \textbf{ Hipótesis} \\
\iff\ & m_3 \cdot \underline{m_2} \cdot n_4 < \underline{m_2} \cdot n_3 \cdot m_4 && / \textbf{ Ejercicio 9C} \\
\iff\ & m_3 \cdot n_4 < m_4 \cdot n_3
\end{aligned}
$$

Finalmente, la desigualdad obtenida implica por **Definición 5** que $\boxed{u <_f v}$ $\square$.

11.2. Suma y Producto en $\mathbf{Fr}$ (Teoremas 8−18)

También entenderemos que la suma de los naturales es la misma suma de cardinales. Asimismo, el producto de los naturales es el mismo producto de cardinales.

DEFINICIÓN 7 y 8: La suma en $\mathbf{Fr}$ se define como: $\boxed{\dfrac{m_1}{n_1} +_f \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}}$

TEOREMA 8. La operación $+_f$ está bien definida.

Demostración: Debemos demostrar que el resultado de la suma es una fracción no negativa y que es único. Tanto la suma como el producto de cardinales están bien definidos; es decir, tanto el numerador como el denominador del resultado son cardinales (y además finitos). Además, el denominador del resultado es distinto de cero (Contrapositivo del **Ejercicio 9F**). Por lo tanto, el resultado de la suma es una fracción no negativa.

Para demostrar que el resultado de la suma es único, se debe mostrar que si $x + y \simeq_f z$ y $x + y \simeq_f w$, entonces $z \simeq_f w$. Sin embargo, esto es trivial por **Teorema 1** (Transitividad) $\square$.

Observación: En este punto, se abandona la notación $+_f$ y se usará solamente $+$, suponiendo que ya se entiende el contexto en que actúa.

TEOREMA 9. Si x, y, u, v, son tales que $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces $x + y \simeq_f u + v$.

Demostración: Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, u = \dfrac{m_3}{n_3}, v = \dfrac{m_4}{n_4}$, de las hipótesis se obtiene por **Definición 4** que $m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_4 = m_4 \cdot n_2$. Con ello, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} &\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} && / \textbf{ Teorema 2} \\
&\simeq_f \frac{(m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1) \cdot (n_3 \cdot n_4)}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_3 \cdot n_4)} && / \textbf{ Distributividad} \\
&\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 + m_2 \cdot n_1 \cdot n_3 \cdot n_4}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_3 \cdot n_4)} && / \textbf{ Hipótesis} \\
&\simeq_f \frac{m_3 \cdot n_2 \cdot n_1 \cdot n_4 + m_4 \cdot n_1 \cdot n_3 \cdot n_2}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 \cdot n_4} && / \textbf{ Distributividad} \\
&\simeq_f \frac{(m_3 \cdot n_4 + m_4 \cdot n_3) \cdot (n_1 \cdot n_2)}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 \cdot n_4} && / \textbf{ Teorema 2} \\
&\simeq_f \frac{m_3 \cdot n_4 + m_4 \cdot n_3}{n_3 \cdot n_4} && / \textbf{ Definición 7 y 8} \\
&\simeq_f \frac{m_3}{n_3} + \frac{m_4}{n_4} \quad \square .
\end{aligned}$$

TEOREMA 10. Si $n \neq 0$, entonces $\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{n} \simeq_f \dfrac{m+p}{n}$.

Demostración: $\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{n} \simeq_f \dfrac{m \cdot n + p \cdot n}{n \cdot n} \simeq_f \dfrac{(m+p) \cdot n}{n \cdot (n)} \simeq_f \dfrac{m+p}{n} \quad \square.$

TEOREMA 11A. $+_f$ es conmutativa.

Demostración: $\dfrac{m_1}{n_1} + \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} \simeq_f \dfrac{m_2 \cdot n_1 + m_1 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2} + \dfrac{m_1}{n_1} \quad \square.$

TEOREMA 11B. $+_f$ es asociativa.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) + \frac{m_3}{n_3} &\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} + \frac{m_3}{n_3} \simeq_f \frac{(m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1) \cdot n_3 + m_3 \cdot (n_1 \cdot n_2)}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3} \\
&\simeq_f \frac{m_1 \cdot n_2 \cdot n_3 + m_2 \cdot n_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) + (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \cdot n_1}{n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)} \\
&\simeq_f \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1}{n_1} + \left(\frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3}\right) \quad \square .
\end{aligned}$$

TEOREMAS 12 y 13. $x <_f y \iff x + z <_f y + z$.

Demostración: Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\begin{aligned}
\boxed{x <_f y} &\iff \frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 < n_1 \cdot m_2 \iff m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 < n_1 \cdot m_2 \cdot n_3 \\
&\iff m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 + m_3 \cdot n_1 \cdot n_2 < n_1 \cdot m_2 \cdot n_3 + n_1 \cdot m_3 \cdot n_2 \\
&\iff (m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1) \cdot (n_2) < (n_1) \cdot (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \\
&\iff (m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1) \cdot (n_2 \cdot n_3) < (n_1 \cdot n_3) \cdot (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \\
&\iff \frac{m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_3} <_f \frac{m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_3} \\
&\iff \boxed{x + z <_f y + z} \quad \square .
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 9 y 10: El producto en $\mathbf{Fr}$ se define como: $\boxed{\dfrac{m_1}{n_1} \bullet_f \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}}$

TEOREMA 14. La operación $\bullet_f$ está bien definida.

Demostración: Debemos demostrar que el resultado del producto es una fracción no negativa y que es único. El producto de cardinales está bien definido, por lo que el numerador y el denominador del resultado son cardinales (y además finitos). Además, el denominador del resultado es distinto de cero (Contrapositivo del **Ejercicio 9F**). Por lo tanto, el resultado del producto es una fracción no negativa. En tanto, para demostrar que el resultado del producto es único, se debe mostrar que si $x \cdot y \simeq_f z$ y $x \cdot y \simeq_f w$, entonces $z \simeq_f w$. Sin embargo, esto es trivial por **Teorema 1** (Transitividad) $\square$.

Observación: En este punto, se abandona la notación $\bullet_f$ y se usará solamente $(\cdot)$, suponiendo que ya se entiende el contexto en que actúa.

TEOREMA 15. Si x, y, u, v, son tales que $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces $x \cdot y \simeq_f u \cdot v$.

Demostración: Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, u = \dfrac{m_3}{n_3}, v = \dfrac{m_4}{n_4}$, de las hipótesis se obtiene por **Definición 4** que $m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1 \ \wedge \ m_2 \cdot n_4 = m_4 \cdot n_2$. Con ello, se obtiene:

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \simeq_f \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \simeq_f \frac{(m_1 \cdot m_2) \cdot (n_3 \cdot n_4)}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_3 \cdot n_4)} \simeq_f \frac{(m_3 \cdot n_1) \cdot (m_4 \cdot n_2)}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4} \simeq_f \frac{(m_3 \cdot n_4) \cdot (n_1 \cdot n_2)}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 \cdot n_4}$$
$$\simeq_f \frac{m_3 \cdot n_4}{n_3 \cdot n_4} \simeq_f \frac{m_3}{n_3} \cdot \frac{m_4}{n_4} \quad \square.$$

TEOREMA 16A. $\bullet_f$ es conmutativo. ***Demostración:*** $\dfrac{m_1}{n_1} \cdot \dfrac{m_2}{n_2} \simeq_f \dfrac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \simeq_f \dfrac{m_2 \cdot m_1}{n_2 \cdot n_1} \simeq_f \dfrac{m_2}{n_2} \cdot \dfrac{m_1}{n_1}$ $\square$.

TEOREMA 16B. $\bullet_f$ es asociativo.

Demostración:
$$\left(\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}\right) \cdot \frac{m_3}{n_3} \simeq_f \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{m_3}{n_3} \simeq_f \frac{(m_1 \cdot m_2) \cdot m_3}{(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)}{n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)}$$
$$\simeq_f \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1}{n_1} \cdot \left(\frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{m_3}{n_3}\right) \quad \square.$$

TEOREMA 16C. $\bullet_f$ distribuye sobre $+_f$.

Demostración:
$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \left(\frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3}\right) \simeq_f \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1(m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2)}{n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)}$$
$$\simeq_f \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot n_3 + m_1 \cdot m_3 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot n_3}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} + \frac{m_1 \cdot m_3 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}$$
$$\simeq_f \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} + \frac{m_1 \cdot m_3}{n_1 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} + \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_3}{n_3} \quad \square.$$

TEOREMA 17. $x \cdot z <_f y \cdot z \iff x <_f y$.

Demostración: Si $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\boxed{x \cdot z <_f y \cdot z} \iff \frac{m_1 \cdot m_3}{n_1 \cdot n_3} <_f \frac{m_2 \cdot m_3}{n_2 \cdot n_3} \iff (m_1 \cdot m_3) \cdot (n_2 \cdot n_3) < (n_1 \cdot n_3) \cdot (m_2 \cdot m_3)$$
$$\iff m_1 \cdot n_2 < n_1 \cdot m_2 \iff \frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2} \iff \boxed{x <_f y} \quad \square.$$

TEOREMA 18. Si $x, y \in \mathbf{Fr} \ \wedge \ \dfrac{0}{1} <_f y$, entonces $(\exists z \in \mathbf{Fr}) \ : \ (x \simeq_f y \cdot z)$.

Demostración: Sean $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}$. Como $\dfrac{0}{1} <_f y$, esto significa que $0 \cdot n_2 < m_2 \cdot 1$ o, mejor dicho, que $\boxed{0 < m_2}$. Con ello, si hacemos $\boxed{z = \dfrac{m_1 \cdot n_2}{m_2 \cdot n_1}}$, se obtiene:

$$y \cdot z \simeq_f \left(\frac{m_2}{n_2}\right)\left(\frac{m_1 \cdot n_2}{m_2 \cdot n_1}\right) \simeq_f \frac{m_2 \cdot (m_1 \cdot n_2)}{n_2 \cdot (m_2 \cdot n_1)} \simeq_f \frac{m_1 \cdot (m_2 \cdot n_2)}{n_1 \cdot (m_2 \cdot n_2)} \simeq_f \frac{m_1}{n_1} \simeq_f x \quad \square.$$

11.3. Racionales no negativos Nr (Teoremas 19-25)

De todo lo dicho hasta aquí, podemos decir que:

- $\frac{1}{2} \simeq_f \frac{2}{4} \simeq_f \frac{3}{6} \dots$
- $\frac{1}{3} \simeq_f \frac{2}{6} \simeq_f \frac{3}{9} \dots$
- $\frac{2}{3} \simeq_f \frac{4}{6} \simeq_f \frac{6}{9} \dots$
- $\frac{1}{2} \not\simeq_f \frac{1}{3} \wedge \frac{1}{3} \not\simeq_f \frac{2}{3}$.

Esto nos motiva a definir un conjunto de todas las fracciones no negativas que sean equivalentes con $\frac{1}{2}$ (o $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{3}$, respectivamente). Así, podemos visualizar que **toda fracción no negativa estará en uno y solo uno de estos conjuntos**. Es decir, estos conjuntos son disjuntos de a pares y la unión de todos ellos nos da el conjunto $\mathbf{Fr}$.

Cabe destacar que esto mismo sucederá cada vez que sobre un conjunto A se define una relación de equivalencia $\mathcal{R}$.

<u>DEFINICIÓN 11</u>: Si $x \in \mathbf{Fr}$, la clase de equivalencia de x bajo $\simeq_f$ es: $\boxed{[x]_n = \{\, y \in \mathbf{Fr} \mid y \simeq_f x\}}$

<u>DEFINICIÓN 12</u>: $\boxed{\mathbf{Nr} = \{\, A \mid (\exists x \in \mathbf{Fr}) : (A = [x]_n)\}}$

<u>TEOREMA 19</u>. Nr es una partición disjunta del conjunto Fr. En otras palabras, $\boxed{\mathbf{Nr} = \mathbf{Fr}/\simeq_f}$.

Demostración: Debemos demostrar que para el conjunto N_r se cumple que:

- $\bigcup \mathbf{Nr} = \mathbf{Fr}$
- $[x]_n \cap [y]_n = \varnothing$

Recurriendo a la **<u>Definición A3</u>**, $\boxed{x \in \bigcup \mathbf{Nr} \iff (\exists [x]_n \ : \ x \in [x]_n \ \wedge [x]_n \in \mathbf{Nr}) \iff x \in \mathbf{Fr}}$. Así, se ha demostrado la primera afirmación.

Para la segunda afirmación, suponemos que $\boxed{[x]_n \neq [y]_n}$ tales que $[x]_n \cap [y]_n \neq \varnothing$. Así, existe $z \in [x]_n \cap [y]_n$. A partir de la **<u>Definición 11</u>**, se sigue que $z \simeq_f x \ \wedge \ z \simeq_f y$. Luego, por tividad (**<u>Teorema 1</u>**) se obtiene $x \simeq_f y$, por lo que $x \in [y]_n$. Es decir, $\boxed{[x]_n = [y]_n}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Así, se ha demostrado la segunda afirmación.

Por lo tanto, $\boxed{\mathbf{Nr} = \mathbf{Fr}/\simeq_f}$ $\square$.

NOTACIÓN: $M = [x]_n$. Es decir, se denotarán los racionales no negativos con mayúsculas.

<u>DEFINICIÓN 13</u>: (Orden en Nr). Si $M, N \in \mathbf{Nr}$, entonces:

$$\boxed{M <_n N \iff x \in M \ \wedge \ y \in N \ \wedge \ x <_f y}$$

<u>TEOREMA 20</u>. $<_n$ es un orden parcial estricto en Nr.

Demostración: Como ya vimos en la demostración del **<u>Teorema 3</u>**, debemos demostrar que $<_n$ es irreflejo, asimétrico y transitivo. Para ello, hacemos $x \in M, y \in N, z \in P$.

Como $<_f$ es irreflejo, entonces $\sim (x <_f x)$. Así, por negación de la **<u>Definición 13</u>**, se obtiene $\sim (M <_n M)$, por lo que $<_n$ **es irreflejo**.

Si $M <_n N$, por **<u>Definición 13</u>** se obtiene $x <_f y$. Como $<_f$ es asimétrico, se sigue que $\sim (y <_f x)$. Así, por negación de la **<u>Definición 13</u>**, se obtiene $\sim (N <_n M)$, por lo que $<_n$ **es asimétrico**.

Ahora, si $M <_n N \ \wedge \ N <_n P$, por **<u>Definición 13</u>** se obtiene $x <_f y \ \wedge y <_f z$. Como $<_f$ es transitivo, se sigue que $x <_f z$. Así, por **<u>Definición 13</u>**, se obtiene $M <_n P)$, por lo que $<_n$ **es transitivo**.

Finalmente, se concluye que $<_n$ es un orden parcial estricto $\square$.

DEFINICIÓN 14 y 15: (Suma en $\mathbf{Nr}$). Si $M, N, P \in \mathbf{Nr}$, entonces:

$$\boxed{M +_n N = P \iff x \in M \ \wedge \ y \in N \ \wedge \ z \in P \ \wedge \ x +_f y \simeq_f z}$$

Haciendo $M = [x]_n, N = [y]_n, P = [z]_n$, como $z \simeq_f x + y$, se obtiene $\boxed{[x]_n + [y]_n = [x+y]_n}$.

TEOREMA 21. La operación $+_n$ está bien definida.

Demostración: Demostraremos que el resultado de la suma es racional no negativo y que es único.

Haciendo $M = [x]_n, N = [y]_n$, como $z \simeq_f x+y \in \mathbf{Fr}$ (por **Teorema 8**), se sigue que el resultado de la suma es $P = [z]_n = [x+y]_n$. Así, $M +_n N \in \mathbf{Nr}$.

Ahora, supongamos que existe $Q \in \mathbf{Nr}, Q \neq P$ tal que $M +_n N = Q$. Por **Definición 14**, existen $u \in M, v \in N, w \in Q$ tales que $u + v \simeq_f w$. Como $u \in M$ y $v \in N$, entonces por **Definición 11** se sigue que $u \simeq_f x$ y $v \simeq_f y$; luego, por **Teorema 9** se obtiene que $u + v \simeq_f x + y$. Por Transitividad (**Teorema 1**), se obtiene que $w \simeq_f x + y$, de donde $w \in [x+y]_n$. Como $w \in Q$ y $P = [x+y]_n$, se concluye que $Q = P$ $\square$.

TEOREMA 22A. $+_n$ es conmutativa.

Demostración: Por **Teorema 11A** se cumple $x+y \simeq_f y+x$. Por **Definición 11** se sigue que $[x+y]_n = [y+x]_n$, mientras que por **Definición 14** se concluye que $[x]_n + [y]_n = [y]_n + [x]_n$ $\square$.

TEOREMA 22B. $+_n$ es asociativa.

Demostración: Por **Teorema 11B** se cumple $(x+y)+z \simeq_f x+(y+z)$. Por **Definición 11** se sigue que $[(x+y)+z]_n = [x+(y+z)]_n$, mientras que la **Definición 14** implica que $[x+y]_n+[z]_n = [x]_n+[y+z]_n$. Finalmente, por **Definición 14** se concluye que $([x]_n + [y]_n) + [z]_n = [x]_n + ([y]_n + [z]_n)$ $\square$.

TEOREMA 22C. $M <_n N \iff M + P <_n N + P$.

Demostración: Definiendo que $M = [x]_n, N = [y]_n, P = [z]_n$, de la hipótesis y del **Teorema 12** se sigue directamente que:

$$\begin{aligned}\boxed{M <_n N} &\iff [x]_n <_n [y]_n \iff x <_f y \iff x + z <_f y + z \iff [x+z]_n <_n [y+z]_n \\ &\iff [x]_n + [z]_n <_n [y]_n + [z]_n \iff \boxed{M + P <_n N + P} \ \square .\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 16 y 17: (Producto en $\mathbf{Nr}$). Si $M, N, P \in \mathbf{Nr}$, entonces:

$$\boxed{M \bullet_n N = P \iff x \in M \ \wedge \ y \in N \ \wedge \ z \in P \ \wedge \ x \bullet_f y \simeq_f z}$$

Haciendo $M = [x]_n, N = [y]_n, P = [z]_n$, como $z \simeq_f x \cdot y$, se obtiene $\boxed{[x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n}$.

TEOREMA 23. La operación $\bullet_n$ está bien definida.

Demostración: Demostraremos que el resultado del producto es racional no negativo y es único.

Haciendo $M = [x]_n, N = [y]_n$, como $z \simeq_f x \cdot y \in \mathbf{Fr}$ (por **Teorema 14**), se sigue que el resultado del producto es $P = [z]_n = [x \cdot y]_n$. Así, $M \bullet_n N \in \mathbf{Nr}$.

Ahora, supongamos que existe $Q \in \mathbf{Nr}, Q \neq P$ tal que $M \bullet_n N = Q$. Por **Definición 14**, existen $u \in M, v \in N, w \in Q$ tales que $u \cdot v \simeq_f w$. Como $u \in M$ y $v \in N$, entonces por **Definición 11** se sigue que $u \simeq_f x$ y $v \simeq_f y$; luego, por **Teorema 15** se obtiene que $u \cdot v \simeq_f x \cdot y$. Por Transitividad (**Teorema 1**), se obtiene que $w \simeq_f x \cdot y$, de donde $w \in [x \cdot y]_n$. Como $w \in Q$ y $P = [x \cdot y]_n$, se concluye que $Q = P$ $\square$.

TEOREMA 24A. $\bullet_n$ es conmutativa.

Demostración: Por **Teorema 16A** se cumple $x \cdot y \simeq_f y \cdot x$. Por **Definición 11** se sigue que $[x \cdot y]_n = [y \cdot x]_n$, mientras que por **Definición 16** se concluye que $[x]_n \cdot [y]_n = [y]_n \cdot [x]_n$ $\square$.

TEOREMA 24B. $\bullet_n$ es asociativa.

Demostración: Por **Teorema 16B** se cumple $(x \cdot y) \cdot z \simeq_f x \cdot (y \cdot z)$. Por **Definición 11** se sigue que $[(x \cdot y) \cdot z]_n = [x \cdot (y \cdot z)]_n$, mientras que la **Definición 16** implica que $[x \cdot y]_n \cdot [z]_n = [x]_n \cdot [y \cdot z]_n$. Finalmente, por **Definición 16** se concluye que $([x]_n \cdot [y]_n) \cdot [z]_n = [x]_n \cdot ([y]_n \cdot [z]_n)$ $\square$.

TEOREMA 24C. $\bullet_n$ distribuye sobre $+_n$.

Demostración: Por **Teorema 16C** se cumple $x \cdot (y + z) \simeq_f x \cdot y + x \cdot z$.

Por **Definición 11** se sigue que $[x \cdot (y + z)]_n = [x \cdot y + x \cdot z]_n$.

Ahora, la **Definición 16** implica que $[x \cdot (y+z)]_n = [x]_n \cdot [y+z]_n$, mientras que por la **Definición 11** se sigue $[x]_n \cdot [y + z]_n = [x]_n \cdot ([y]_n + [z]_n)$.

Por otra parte, la **Definición 11** implica que $[x \cdot y + x \cdot z]_n = [x \cdot y]_n + [x \cdot z]_n$, mientras que por la **Definición 16** se sigue $[x \cdot y]_n + [x \cdot z]_n = [x]_n \cdot [y]_n + [x]_n \cdot [z]_n$.

Finalmente, del **Teorema 20** se concluye que $[x]_n \cdot ([y]_n + [z]_n) = [x]_n \cdot [y]_n + [x]_n \cdot [z]_n$ $\square$.

DEFINICIÓN 18 y 19: Neutros en $(\mathbf{Nr}, +_n, \bullet_n)$. $\boxed{0_n = \left[\frac{0}{1}\right]_n \ , \ 1_n = \left[\frac{1}{1}\right]_n}$

TEOREMA 25A. $0_n \neq 1_n$.

Demostración: Por Contradicción, suponer que $0_n = 1_n$. Esto implica que $\frac{0}{1} \simeq_f \frac{1}{1}$, de donde se sigue $0 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ (o bien $0 = 1$). Como $0 = \mathcal{K}(\varnothing)$ y $1 = \mathcal{K}(\{\varnothing\})$, por **Axioma de Cardinalidad** se obtiene que $\varnothing \approx \{\varnothing\}$. Esto implicaría que **existe** $f : \{\varnothing\} \longrightarrow \varnothing$ biyectiva.

Sin embargo, ya se ha demostrado que $\varnothing^{\{\varnothing\}} = \varnothing$ (**Ejercicio 4B**). Esta afirmación dice que **no existe** $f : \{\varnothing\} \longrightarrow \varnothing$, por lo que se llega a una contradicción. Por lo tanto, $0_n \neq 1_n$ $\square$.

TEOREMA 25B. Si $M \in \mathbf{Nr}$, entonces $M + 0_n = M$ y $M \cdot 1_n = M$.

Demostración: Sea $M = [x]_n$. Por **Ejercicio 11C** se tiene $x + \frac{0}{1} \simeq_f x$, de donde $\left[x + \frac{0}{1}\right]_n = [x]$ y, por **Definición 14** se obtiene $[x]_n + \left[\frac{0}{1}\right]_n = [x]_n$, lo que concluye que $M + 0_n = M$.

Análogamente, por **Ejercicio 11E** se tiene $x \cdot \frac{1}{1} \simeq_f x$, de donde $\left[x \cdot \frac{1}{1}\right]_n = [x]$ y de allí, por **Definición 16** se obtiene $[x]_n \cdot \left[\frac{1}{1}\right]_n = [x]_n$, lo que concluye que $M \cdot 1_n = M$ $\square$.

TEOREMA 25C. Si $M, N, P \in \mathbf{Nr}$ tales que $0_n <_n M \ \wedge N <_n P$, entonces $M \cdot N <_n M \cdot P$.

Demostración: Definimos $M = [z]_n, N = [x]_n, P = [y]_n$. De las hipótesis se sigue $\frac{0}{1} <_f z \ \wedge x <_f y$. Gracias al **Teorema 17** se sigue que $x \cdot z <_f y \cdot z$, de donde $[x \cdot z]_n <_n [y \cdot z]_n$. Por **Definición 16** se obtiene $[x]_n \cdot [z]_n <_n [y]_n \cdot [z]_n$, o, mejor dicho, $M \cdot N <_n M \cdot P$ $\square$.

TEOREMA 25D. Si $M, N \in \mathbf{Nr} \ \wedge \ 0_n <_n N$, entonces $(\exists P \in \mathbf{Nr}) \ : \ (M = N \cdot P)$.

Demostración: Definimos $M = [x]_n, N = [y]_n$. De las hipótesis se sigue $\frac{0}{1} <_f y$. Gracias al **Teorema 18** se sigue que existe z tal que $x \simeq_f y \cdot z$, de donde $[x]_n = [y \cdot z]_n$. Por **Definición 16**, existe $[z]_n$ tal que $[x]_n = [y]_n \cdot [z]_n$, o, mejor dicho, $M = N \cdot P$ $\square$.

11.4. Ejercicios propuestos

11A. Para $x, y, z \in \mathbf{Fr}$**, demostrar que** $x \simeq_f y \iff x + z \simeq_f y + z$.

11B. Para $x, y, z \in \mathbf{Fr}$**, demostrar que** $x \simeq_f y \iff x \cdot z \simeq_f y \cdot z$. **Definiendo** $0_f = \dfrac{0}{1}$ **y** $1_f = \dfrac{1}{1}$**, demostrar que para** $x, y, z \in \mathbf{Fr}$ **se cumple:**

11C. $x + 0_f \simeq_f x$ **11D.** $x \cdot 0_f \simeq_f 0_f$ **11E.** $x \cdot 1_f \simeq_f x$

11F. Defina una relación de orden <u>menor o igual</u> en el conjunto $\mathbf{Fr}$**, simbolizada por** $\leqslant_f$**, a partir de lo visto en el Curso.**

11G. Verifique si $\leqslant_f$ **es antisimétrica.**

11H. Si $x, y, u, v \in \mathbf{Fr}$ **son tales que** $x \leqslant_f y \ \wedge \ x \simeq_f u \ \wedge \ y \simeq_f v$**, demostrar que** $u \leqslant_f v$**.**

11I. Si $x, y, z \in \mathbf{Fr}$ **son tales que** $x \leqslant_f y \ \wedge \ y <_f z$**, demostrar que** $x <_f z$**.**

11J. Para $M, N, P \in \mathbf{Nr}$**, demostrar que** $M = N \iff M + P = N + P$.

11K. Si $M, N \in \mathbf{Nr}$**, demostrar que** $0 <_n M_1 <_n M_2 \ \wedge \ 0 <_n N_1 <_n N_2 \implies 0 <_n M_1 \cdot N_1 <_n M_2 \cdot N_2$.

11.5. Una solución para los Ejercicios propuestos

11A. Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\begin{aligned}
\boxed{x \simeq_f y} &\iff \frac{m_1}{n_1} \simeq_f \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2 \iff m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2 \cdot n_3 \\
&\iff m_1 \cdot n_3 \cdot n_2 + m_3 \cdot n_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2 \cdot n_3 + n_1 \cdot m_3 \cdot n_2 \\
&\iff (m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1) \cdot (n_2) = (n_1) \cdot (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \\
&\iff (m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1) \cdot (n_2 \cdot n_3) = (n_1 \cdot n_3) \cdot (m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2) \\
&\iff \frac{m_1 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_2 \cdot n_3 + m_3 \cdot n_2}{n_2 \cdot n_3} \iff \boxed{x + z \simeq_f y + z} \quad \square .
\end{aligned}$$

11B. Definiendo que $x = \dfrac{m_1}{n_1}, y = \dfrac{m_2}{n_2}, z = \dfrac{m_3}{n_3}$, de la hipótesis se sigue directamente que:

$$\begin{aligned}
\boxed{x \cdot z \simeq_f y \cdot z} &\iff \frac{m_1 \cdot m_3}{n_1 \cdot n_3} \simeq_f \frac{m_2 \cdot m_3}{n_2 \cdot n_3} \iff (m_1 \cdot m_3) \cdot (n_2 \cdot n_3) = (n_1 \cdot n_3) \cdot (m_2 \cdot m_3) \\
&\iff m_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2 \iff \frac{m_1}{n_1} \simeq_f \frac{m_2}{n_2} \iff \boxed{x \simeq_f y} \quad \square .
\end{aligned}$$

11C. Definiendo que $x = \dfrac{m}{n}$ y considerando $0_f = \dfrac{0}{1}$, se obtiene directamente que:

$$x + 0_f \simeq_f \frac{m}{n} + \frac{0}{1} \simeq_f \frac{m \cdot 1 + 0 \cdot n}{n \cdot 1} \simeq_f \frac{m + 0}{n} \simeq_f \frac{m}{n} \simeq_f x \quad \square .$$

11D. Definiendo que $x = \dfrac{m}{n}$ y considerando $0_f = \dfrac{0}{1}$, se obtiene directamente que:

$$x \cdot 0_f \simeq_f \frac{m}{n} \cdot \frac{0}{1} \simeq_f \frac{m \cdot 0}{n \cdot 1} \simeq_f \frac{0}{n} \simeq_f \frac{0}{1} \simeq_f 0_f \quad \square .$$

11E. Definiendo que $x = \dfrac{m}{n}$ y considerando $1_f = \dfrac{1}{1}$, se obtiene directamente que:

$$x \cdot 1_f \simeq_f \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} \simeq_f \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} \simeq_f \frac{m}{n} \simeq_f x \quad \square .$$

11F. En el conjunto $\mathbf{Fr}$ ya está definida la relación de equivalencia $\simeq_f$ y el orden estricto $<_f$. A partir de ellos, se define la relación de orden ***menor o igual*** $\leqslant_f$ como:

$$\boxed{\frac{m_1}{n_1} \leqslant_f \frac{m_2}{n_2}} \Leftrightarrow \frac{m_1}{n_1} <_f \frac{m_2}{n_2} \vee \frac{m_1}{n_1} \simeq_f \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1 \vee m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \Leftrightarrow \boxed{m_1 \cdot n_2 \leqslant m_2 \cdot n_1}$$

11G. Definimos $x = \dfrac{m}{n}$ e $y = \dfrac{p}{q}$. Para ver que $\leqslant_f$ es antisimétrica, suponemos que $x \leqslant_f y \ \wedge \ y \leqslant_f x$ y debemos demostrar que $x \simeq_f y$. A partir de las hipótesis es inmediato que:

$$x \leqslant_f y \ \wedge \ y \leqslant_f x \implies \frac{m}{n} \leqslant_f \frac{p}{q} \ \wedge \ \frac{p}{q} \leqslant_f \frac{m}{n} \implies m \cdot q \leqslant n \cdot p \ \wedge \ n \cdot p \leqslant m \cdot q \overset{\text{Teo.73}}{\implies} m \cdot q = n \cdot p$$

Aplicando la **Definición 1**, se obtiene $\dfrac{m}{n} \simeq_f \dfrac{p}{q}$, de donde se concluye que $x \simeq_f y$ $\square$.

11H. De la primera hipótesis $x \leqslant_f y$ se deduce que $x <_f y \ \vee \ x \simeq_f y$. Como además se cumplen $x \simeq_f u$ e $y \simeq_f v$, entonces por **Teorema 1** (transitividad) dos veces se cumple $u \simeq_f v$, mientras que por **Teorema 7** se cumple $u <_f v$. De ambas hipótesis se recupera que $u \leqslant_f v$ $\square$.

11I. De la primera hipótesis $x \leqslant_f y$ se deduce que $x <_f y \ \vee \ x \simeq_f y$. En el primer caso, como $x <_f y$ e $y <_f z$, por **Teorema 3** (transitividad) se obtiene $x <_f z$. En el segundo caso, como $x \simeq_f y$ e $y <_f z$, considerando además que $z \simeq_f z$, por **Teorema 7** se obtiene también $x <_f z$ $\square$.

11J. Definiendo que $M = [x]_n, N = [y]_n, P = [z]_n$, de la hipótesis y del **Ejercicio 10** se sigue directamente que:

$$\begin{aligned} \boxed{M = N} &\iff [x]_n = [y]_n \iff x \simeq_f y \iff x + z \simeq_f y + z \iff [x+z]_n = [y+z]_n \\ &\iff [x]_n + [z]_n = [y]_n + [z]_n \iff \boxed{M + P = N + P} \ \square . \end{aligned}$$

11K. Por **Teorema 25C**, se sigue de las hipótesis que $M_1 \cdot 0 < M_1 \cdot N_1$; es decir, $0 < M_1 \cdot N_1$. De igual forma, se obtiene $0 < M_2 \cdot N_2$.

Nuevamente por **Teorema 25C**, como $0 < N_1$ y $M_1 < M_2$, se obtiene $N_1 \cdot M_1 < N_1 \cdot M_2$. De igual forma, como $0 < M_2$ y $N_1 < N_2$, entonces $M_2 \cdot N_1 < M_2 \cdot N_2$. Por Transitividad **Teorema 20**, se concluye que $M_1 \cdot N_1 < M_2 \cdot N_2$. Así, se obtiene $0 < M_1 \cdot N_1 < M_2 \cdot N_2$ $\square$.