22234 Fundamentos II – Ayudantía 12

Números Racionales (Teo. 26–32)

EDGARD ALEJANDRO ARAYA CARREÑO – edgard.araya@usach.cl

12.1. Pares de racionales no negativos Sb (Teoremas 26–29)

Suponiendo por un momento que existe una "sustracción" entre racionales no negativos (y recurriendo a lo que sabemos previamente sobre los números racionales), vemos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Sin embargo, si lo escribimos al revés, el resultado es distinto: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$.

Así, si definimos ***informalmente*** la resta como $\boxed{\langle M, N\rangle = M - N}$, del razonamiento anterior se sigue $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{6}; \frac{0}{1} \right\rangle$, mientras que $\left\langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{0}{1}; \frac{1}{6} \right\rangle$.

De forma general (pero informal aún), para $M, N, P \in \mathbf{Nr}$ se tiene:

- Si $N <_n M$ (digamos $M = N + P$), entonces $\boxed{\langle M, N\rangle = \langle P, 0_n\rangle}$.
- Si $M <_n N$ (digamos $N = M + P$), entonces $\boxed{\langle M, N\rangle = \langle 0_n, P\rangle}$.
- Si $M = N$, entonces $\boxed{\langle M, M\rangle = \langle 0_n, 0_n\rangle}$.

Así, hemos conseguido **describir a todos los racionales** (incluso los negativos) **usando a los elementos de** Nr. Ahora, el resto del trabajo es **formalizar esta descripción** y ver que cumple con las propiedades esperadas.

<u>DEFINICIÓN 20</u>: $\boxed{\mathbf{Sb} = \{\langle M, N\rangle \ : \ M, N \in \mathbf{Nr}\}}$.

<u>DEFINICIÓN 21:</u> Relación $\simeq_s$ en Sb: $\boxed{\langle M_1, N_1\rangle \simeq_s \langle M_2, N_2\rangle \iff M_1 + N_2 = M_2 + N_1}$

<u>TEOREMA 26</u>. $\simeq_s$ es una relación de equivalencia en Sb.

Demostración: Una relación de equivalencia debe ser refleja, simétrica y transitiva. Como $\simeq_f$ es relación de equivalencia (**<u>Teorema 1</u>**) y la igualdad en $\mathbf{Nr}$ se define usando $\simeq_f$, todas las demostraciones que siguen se basan fuertemente en los Teoremas anteriores.

Así, para $x + y \in \mathbf{Fr}$ se tiene $x + y \simeq_f x + y$. Por **<u>Definición 12</u>** se obtiene $[x + y]_n = [x + y]_n$. Luego, definiendo $M + N = [x + y]_n$, se obtiene $M + N = M + N$, mientras que la **<u>Definición 21</u>** implica $\langle M, N\rangle \simeq_s \langle M, N\rangle$. Así, $\simeq_s$ **es refleja**.

Ahora bien, si $\langle M_1, N_1\rangle \simeq_s \langle M_2, N_2\rangle$, por **<u>Definición 21</u>** se obtiene que $M_1 + N_2 = M_2 + N_1$. De allí se sigue $M_2 + N_1 = M_1 + N_2$, lo que implica por **<u>Definición 21</u>** que $\langle M_2, N_2\rangle \simeq_s \langle M_1, N_1\rangle$. Por lo tanto, $\simeq_s$ **es simétrica**.

Por último, si $\langle M_1, N_1\rangle \simeq_s \langle M_2, N_2\rangle \ \wedge \ \langle M_2, N_2\rangle \simeq_s \langle M_3, N_3\rangle$, por **<u>Definición 21</u>** se obtiene que $M_1 + N_2 = M_2 + N_1 \ \wedge \ M_2 + N_3 = M_3 + N_2$. Usando las siguientes definiciones, se obtiene:

$\boxed{M_1 = [x_1]_n}$ $\boxed{N_1 = [y_1]_n}$ $\boxed{M_2 = [x_2]_n}$ $\boxed{N_2 = [y_2]_n}$ $\boxed{M_3 = [x_3]_n}$ $\boxed{N_3 = [y_3]_n}$

$$\begin{aligned}
& x_1 + y_2 \simeq_f x_2 + y_1 \ \wedge\ x_2 + y_3 \simeq_f x_3 + y_2 && / \textbf{ Ejercicio 11A} \\
\Longrightarrow\ & (x_1 + y_2) + y_3 \simeq_f (x_2 + y_1) + y_3 \ \wedge\ (x_2 + y_3) + y_1 \simeq_f (x_3 + y_2) + y_1 && / \textbf{ Teorema 11B} \\
\Longrightarrow\ & x_1 + (y_2 + y_3) \simeq_f x_2 + (y_1 + y_3) \ \wedge\ x_2 + (y_1 + y_3) \simeq_f x_3 + (y_2 + y_3) && / \textbf{ Teorema 1 Trans.} \\
\Longrightarrow\ & x_1 + (y_3 + y_2) \simeq_f x_3 + (y_1 + y_2) && / \textbf{ Teorema 11B} \\
\Longrightarrow\ & (x_1 + y_3) + y_2 \simeq_f (x_3 + y_1) + y_2 && / \textbf{ Ejercicio 11A} \\
\Longrightarrow\ & x_1 + y_3 \simeq_f x_3 + y_1
\end{aligned}$$

El resultado obtenido implica por **Definición 12** que $[x_1 + y_3]_n = [x_3 + y_1]_n$ y por **Definición 14** se sigue que $[x_1]_n + [y_3]_n = [x_3]_n + [y_1]_n$. Es decir, $M_1 + N_3 = M_3 + N_1$. Así, por **Definición 21** se obtiene $\langle M_1, N_1\rangle \simeq_s \langle M_3, N_3\rangle$. Por lo tanto, $\simeq_s$ **es transitiva**.

Finalmente, se concluye que $\simeq_s$ es una relación de equivalencia $\square$.

DEFINICIÓN 22: Relación $<_s$ en $\mathbf{Sb}$: $\boxed{\langle M_1, N_1\rangle <_s \langle M_2, N_2\rangle \iff M_1 + N_2 <_n M_2 + N_1}$

***NOTA*: Los " teoremas obvios " sobre $<_s$ se dejan como Ejercicios Adicionales (Ejercicio 12A).**

Siguiendo la definición ***informal*** de la resta como $\boxed{\langle M, N\rangle = M - N}$, ahora debemos definir la suma en $\mathbf{Sb}$:

$$\boxed{\langle M_1, N_1\rangle +_s \langle M_2, N_2\rangle} = (M_1 - N_1) + (M_2 - N_2) = (M_1 + M_2) - (N_1 + N_2) = \boxed{\langle M_1 + M_2, N_1 + N_2\rangle}$$

DEFINICIÓN 23 y 24: (Suma en $\mathbf{Sb}$). Si $A, B, C \in \mathbf{Sb}$, entonces:

$$\boxed{A +_s B \simeq_s C} \iff A \simeq_s \langle M_1, N_1\rangle \wedge B \simeq_s \langle M_2, N_2\rangle \wedge C \simeq_s \langle M_3, N_3\rangle \wedge \boxed{\langle M_1 + M_2, N_1 + N_2\rangle \simeq_s \langle M_3, N_3\rangle}$$

En palabras más simples, se obtiene $\boxed{\langle M_1, N_1\rangle +_s \langle M_2, N_2\rangle \simeq_s \langle M_1 + M_2, N_1 + N_2\rangle}$.

TEOREMA 27. La operación $+_s$ está bien definida.

Demostración: Demostraremos que el resultado de la suma está en $\mathbf{Sb}$ y que es único.

Como la suma en $\mathbf{Nr}$ está bien definida, entonces $M_1 + M_2 \in \mathbf{Nr}$ y $N_1 + N_2 \in \mathbf{Nr}$; luego, por **Definición 20**), se sigue que $\langle M_1 + M_2, N_1 + N_2\rangle \in \mathbf{Sb}$. Así, $\boxed{A +_s B \in \mathbf{Sb}}$.

Ahora, supongamos que existe $D \simeq_s \langle M_4, N_4\rangle, D \not\simeq_s C$ tal que $A +_s B \simeq_s D$. Por **Definición 23**, se cumple $\langle M_1 + M_2, N_1 + N_2\rangle \simeq_s \langle M_4, N_4\rangle$. Como $\simeq_s$ es transitiva (por **Teorema 26)**, se obtiene que $\langle M_3, N_3\rangle \simeq_s \langle M_4, N_4\rangle$, de donde $D \simeq_s C$ $\square$.

***NOTA*: Los " teoremas obvios " sobre $+_s$ se dejan como Ejercicios Adicionales (Ejercicio 12B).**

Siguiendo la definición ***informal*** de la resta como $\boxed{\langle M, N\rangle = M - N}$, ahora debemos definir el producto en $\mathbf{Sb}$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\langle M_1, N_1\rangle \bullet_s \langle M_2, N_2\rangle} &= (M_1 - N_1) \cdot (M_2 - N_2) = (M_1 \cdot (M_2 - N_2) - N_1 \cdot (M_2 - N_2) \\
&= M_1 \cdot M_2 - M_1 \cdot N_2 - N_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2 \\
&= (M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2) - (M_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot M_2) \\
&= \boxed{\langle M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2\ ;\ M_1 \cdot N_2 + M_2 \cdot N_1\rangle}
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 25 y 26: (Producto en $\mathbf{Sb}$). Si $A, B, C \in \mathbf{Sb}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\boxed{A \bullet_s B \simeq_s C} \iff\ & A \simeq_s \langle M_1, N_1\rangle \wedge B \simeq_s \langle M_2, N_2\rangle \wedge C \simeq_s \langle M_3, N_3\rangle \\
\wedge\ & \boxed{\langle M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2\ ;\ M_1 \cdot N_2 + M_2 \cdot N_1\rangle \simeq_s \langle M_3, N_3\rangle}
\end{aligned}$$

En resumen, se obtiene $\boxed{\langle M_1, N_1\rangle \bullet_s \langle M_2, N_2\rangle \simeq_s \langle M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2\ ;\ M_1 \cdot N_2 + M_2 \cdot N_1\rangle}$.

TEOREMA 28. La operación $\bullet_s$ está bien definida.

Demostración: Demostraremos que el resultado del producto está en $\mathbf{Sb}$ y que es único.

Como la suma y el producto en $\mathbf{Nr}$ están bien definidos, entonces $M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2 \in \mathbf{Nr}$ y $M_1 \cdot N_2 + M_2 \cdot N_1 \in \mathbf{Nr}$; luego, por **Definición 20**), se sigue que $\langle M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2 \,;\, M_1 \cdot N_2 + M_2 \cdot N_1 \rangle \in \mathbf{Sb}$. Así, $\boxed{A \bullet_s B \in \mathbf{Sb}}$.

Ahora, supongamos que existe $D \simeq_s \langle M_4, N_4 \rangle, D \not\simeq_s C$ tal que $A \bullet_s B \simeq_s D$. Por **Definición 25**, se cumple $\langle M_1 \cdot M_2 + N_1 \cdot N_2 \,;\, M_1 \cdot N_2 + M_2 \cdot N_1 \rangle \simeq_s \langle M_4, N_4 \rangle$. Como $\simeq_s$ es transitiva (por **Teorema 26)**, se obtiene que $\langle M_3, N_3 \rangle \simeq_s \langle M_4, N_4 \rangle$, de donde $D \simeq_s C$ $\square$.

***NOTA*: Los " teoremas obvios " sobre $\bullet_s$ se dejan como Ejercicios Adicionales (Ejercicio 12C).**

TEOREMA 29A. Si $A, B, C, D \in \mathbf{Sb}$ son tales que $A \simeq_s C \;\wedge\; B \simeq_s D \;\wedge\; A <_s B$, entonces $C <_s D$.

Demostración: Definimos $\boxed{A = \langle M_1, N_1 \rangle}$, $\boxed{B = \langle M_2, N_2 \rangle}$, $\boxed{C = \langle M_3, N_3 \rangle}$, $\boxed{D = \langle M_4, N_4 \rangle}$.

Por **Definición 21**, se sigue que $M_1 + N_3 = M_3 + N_1 \;\wedge\; M_2 + N_4 = M_4 + N_2$. Con ello, de la tercera hipótesis, por **Definición 22** se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& M_1 + N_2 <_n M_2 + N_1 && / \textbf{ Teorema 22C} \\
\iff\; & M_1 + N_3 + N_2 <_n M_2 + N_1 + N_3 && / \textbf{ Hipótesis} \\
\iff\; & M_3 + \underline{N_1} + N_2 <_n M_2 + \underline{N_1} + N_3 && / \textbf{ Teorema 22C} \\
\iff\; & M_3 + N_2 <_n M_2 + N_3 && / \textbf{ Teorema 22C} \\
\iff\; & M_3 + N_2 + M_4 <_n M_2 + N_3 + M_4 && / \textbf{ Hipótesis} \\
\iff\; & M_3 + \underline{M_2} + N_4 < \underline{M_2} + N_3 + M_4 && / \textbf{ Teorema 22C} \\
\iff\; & M_3 + N_4 < M_4 + N_3
\end{aligned}
$$

Finalmente, la desigualdad obtenida implica por **Definición 22** que $\boxed{C <_s D}$ $\square$.

TEOREMA 29B. Si $A, B, C, D \in \mathbf{Sb}$ son tales que $A \simeq_s C \;\wedge\; B \simeq_s D$, entonces $A + B \simeq_s C + D$.

Demostración: Definimos $\boxed{A = \langle M_1, N_1 \rangle}$, $\boxed{B = \langle M_2, N_2 \rangle}$, $\boxed{C = \langle M_3, N_3 \rangle}$, $\boxed{D = \langle M_4, N_4 \rangle}$.

De las hipótesis se obtiene por **Definición 21** que $M_1 + N_3 = M_3 + N_1 \;\wedge\; M_2 + N_4 = M_4 + N_2$. Con ello, se obtiene por **Definición 23**:

$$
\begin{aligned}
\langle M_1, N_1 \rangle +_s \langle M_2, N_2 \rangle & \simeq_s \langle M_1 + M_2, N_1 + N_2 \rangle && / \textbf{ Ejercicio 12B.e.} \\
& \simeq_s \langle M_1 + M_2, N_1 + N_2 \rangle +_s \langle N_3, N_3 \rangle && / \textbf{ Definición 23} \\
& \simeq_s \langle (M_1 + N_3) + M_2, N_1 + N_2 + N_3 \rangle && / \textbf{ Hipótesis} \\
& \simeq_s \langle (M_3 + \underline{N_1}) + M_2, \underline{N_1} + N_2 + N_3 \rangle && / \textbf{ Definición 23} \\
& \simeq_s \langle M_2 + M_3, N_2 + N_3 \rangle +_s \langle N_1, N_1 \rangle && / \textbf{ Definición 21} \\
& \simeq_s \langle M_2 + M_3, N_2 + N_3 \rangle +_s \langle N_4, N_4 \rangle && / \textbf{ Definición 23} \\
& \simeq_s \langle (M_2 + N_4) + M_3, N_2 + N_3 + N_4 \rangle && / \textbf{ Hipótesis} \\
& \simeq_s \langle (M_4 + \underline{N_2}) + M_3, \underline{N_2} + N_3 + N_4 \rangle && / \textbf{ Definición 23} \\
& \simeq_s \langle M_3 + M_4, N_3 + N_4 \rangle +_s \langle N_2, N_2 \rangle && / \textbf{ Ejercicio 12B.e.} \\
& \simeq_f \langle M_3 + M_4, N_3 + N_4 \rangle && / \textbf{ Definición 23} \\
& \simeq_f \langle M_3, N_3 \rangle +_s \langle M_4, N_4 \rangle \;\; \square .
\end{aligned}
$$

TEOREMA 29C. Si $A, B, C, D \in \mathbf{Sb}$ son tales que $A \simeq_s C \;\wedge\; B \simeq_s D$, entonces $A \cdot B \simeq_s C \cdot D$.

Demostración: Definimos $\boxed{A = \langle M_1, N_1 \rangle}$, $\boxed{B = \langle M_2, N_2 \rangle}$, $\boxed{C = \langle M_3, N_3 \rangle}$, $\boxed{D = \langle M_4, N_4 \rangle}$.

De las hipótesis se obtiene por **Definición 21** que $M_1 + N_3 = M_3 + N_1 \;\wedge\; M_2 + N_4 = M_4 + N_2$. Con ello, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\langle M_1, N_1\rangle \bullet_s \langle M_2, N_2\rangle && \text{/ \textbf{Definición 25}}\\
\simeq_s\ &\langle M_1\cdot M_2 + N_1\cdot N_2\ ;\ M_1\cdot N_2 + M_2\cdot N_1\rangle && \text{/ \textbf{Ejercicio 12B.e.}}\\
\simeq_s\ &\langle M_1\cdot M_2 + N_1\cdot N_2\ ;\ M_1\cdot N_2 + M_2\cdot N_1\rangle +_s \langle M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2, M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle && \text{/ \textbf{Definición 23}}\\
\simeq_s\ &\langle M_1\cdot M_2 + M_2\cdot N_3 + N_1\cdot N_2 + M_3\cdot N_2\ ;\ M_1\cdot N_2 + M_2\cdot N_1 + M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle && \text{/ \textbf{Teorema 24C}}\\
\simeq_s\ &\langle M_2\cdot (M_1 + N_3) + N_2\cdot (N_1 + M_3)\ ;\ M_1\cdot N_2 + M_2\cdot N_1 + M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle && \text{/ \textbf{Hipótesis}}\\
\simeq_s\ &\langle M_2\cdot (M_3 + N_1) + N_2\cdot (N_3 + M_1)\ ;\ M_1\cdot N_2 + M_2\cdot N_1 + M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle && \text{/ \textbf{Teorema 24C}}\\
\simeq_s\ &\langle M_2\cdot M_3 + \underline{M_2\cdot N_1} + N_2\cdot N_3 + M_1\cdot N_2\ ;\ M_1\cdot N_2 + \underline{M_2\cdot N_1} + M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle && \text{/ \textbf{Definición 23}}\\
\simeq_s\ &\langle M_2\cdot M_3 + N_2\cdot N_3\ ;\ M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle +_s \langle M_1\cdot N_2 + M_2\cdot N_1, M_1\cdot N_2 + M_2\cdot N_1\rangle && \text{/ \textbf{Ejercicio 12B.e.}}\\
\simeq_s\ &\langle M_2\cdot M_3 + N_2\cdot N_3\ ;\ M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle && \text{/ \textbf{Ejercicio 12B.e.}}\\
\simeq_s\ &\langle M_2\cdot M_3 + N_2\cdot N_3\ ;\ M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle +_s \langle M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3, M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3\rangle && \text{/ \textbf{Definición 23}}\\
\simeq_s\ &\langle M_2\cdot M_3 + M_3\cdot N_4 + N_2\cdot N_3 + M_4\cdot N_3\ ;\ M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2 + M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3\rangle && \text{/ \textbf{Teorema 24C}}\\
\simeq_s\ &\langle M_3\cdot (M_2 + N_4) + N_3\cdot (M_4 + N_2)\ ;\ M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2 + M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3\rangle && \text{/ \textbf{Hipótesis}}\\
\simeq_s\ &\langle M_3\cdot (M_4 + N_2) + N_3\cdot (M_2 + N_4)\ ;\ M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2 + M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3\rangle && \text{/ \textbf{Teorema 24C}}\\
\simeq_s\ &\langle M_3\cdot M_4 + \underline{M_3\cdot N_2} + M_2\cdot N_3 + N_3\cdot N_4\ ;\ M_2\cdot N_3 + \underline{M_3\cdot N_2} + M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3\rangle && \text{/ \textbf{Definición 23}}\\
\simeq_s\ &\langle M_3\cdot M_4 + N_3\cdot N_4\ ;\ M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3\rangle +_s \langle M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2, M_2\cdot N_3 + M_3\cdot N_2\rangle && \text{/ \textbf{Ejercicio 12B.e.}}\\
\simeq_s\ &\langle M_3\cdot M_4 + N_3\cdot N_4\ ;\ M_3\cdot N_4 + M_4\cdot N_3\rangle && \text{/ \textbf{Definición 25}}\\
\simeq_s\ &\langle M_3, N_3\rangle \bullet_s \langle M_4, N_4\rangle \quad \square\,.
\end{aligned}
$$

12.2. Números Racionales $\mathbb{Q}$ (Teoremas 30−32)

Tal como los elementos de $\mathbf{Nr}$ corresponden a clases de equivalencia de elementos de $\mathbf{Fr}$, ahora se definirán los racionales $\mathbb{Q}$ como clases de equivalencia de elementos de $\mathbf{Sb}$.

DEFINICIÓN 27: Si $A \in \mathrm{Sb}$, la clase de equivalencia de A bajo $\simeq_s$ es: $\boxed{[A]_s = \{\, B \in \mathbf{Sb} \mid B \simeq_s A\}}$

DEFINICIÓN 28: $\boxed{\mathbb{Q} = \{\, x \mid (\exists A \in \mathbf{Sb}) : (x = [A]_s)\}}$

DEFINICIÓN 29: (Orden en $\mathbb{Q}$). Si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces: $\boxed{x <_q y \iff A \in x \ \wedge\ B \in y \ \wedge\ A <_s B}$

DEFINICIÓN 30 y 31: (Suma en $\mathbb{Q}$). Si $x, y, z \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$\boxed{x +_q y = z \iff A \in x \ \wedge\ B \in y \ \wedge\ C \in z \ \wedge\ A +_s B \simeq_s C}$$

Haciendo $x = [A]_s, y = [B]_s, z = [C]_s$, como $C \simeq_s A + B$, se obtiene $\boxed{[A]_s + [B]_s = [A + B]_s}$.

TEOREMA 30. La operación $+_q$ está bien definida.

Demostración: Demostraremos que el resultado de la suma está en $\mathbb{Q}$ y que es único.

Haciendo $x = [A]_s, y = [B]_s$, como $C \simeq_s A +_s B \in \mathbf{Sb}$ (por **Teorema 27**), se sigue que el resultado de la suma es $z = [C]_s = [A +_s B]_s$. Así, $(x +_q y) \in \mathbb{Q}$.

Ahora, supongamos que existe $w \in \mathbb{Q}, w \neq z$ tal que $x +_q y = w$. Por **Definición 30**, existen $F \in x, G \in y, H \in w$ tales que $F +_s G \simeq_s H$. Como $F \in x$ y $G \in y$, entonces por **Definición 27** se sigue que $F \simeq_s A$ y $G \simeq_s B$; luego, por **Teorema 29B** se obtiene que $F + G \simeq_s A + B$. Por Transitividad (**Teorema 26**), se obtiene que $H \simeq_s A + B$, de donde $H \in [A + B]_s$. Como $H \in w$ y $z = [A + B]_s$, se concluye que $w = z$ $\square$.

DEFINICIÓN 32 y 33: (Producto en $\mathbb{Q}$). Si $x, y, z \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$\boxed{x \bullet_q y = z \iff A \in x \ \wedge\ B \in y \ \wedge\ C \in z \ \wedge\ A \bullet_s B \simeq_s C}$$

Haciendo $x = [A]_s, y = [B]_s, z = [C]_s$, como $C \simeq_s A \cdot B$, se obtiene $\boxed{[A]_s \cdot [B]_s = [A \cdot B]_s}$.

TEOREMA 31. La operación $\bullet_q$ está bien definida.

Demostración: Demostraremos que el resultado del producto está en $\mathbb{Q}$ y es único.

Haciendo $x = [A]_s, y = [B]_s$, como $C \simeq_s A \cdot B \in \mathbf{Sb}$ (por **Teorema 28**), se sigue que el resultado del producto es $z = [C]_s = [A \cdot B]_s$. Así, $x \bullet_q y \in \mathbb{Q}$.

Ahora, supongamos que existe $w \in \mathbb{Q}, w \neq z$ tal que $x \bullet_q y = w$. Por **Definición 32**, existen $F \in x, G \in y, H \in w$ tales que $F \cdot G \simeq_s H$. Como $F \in x$ y $G \in y$, entonces por **Definición 27** se sigue que $F \simeq_s A$ y $G \simeq_s B$; luego, por **Teorema 29C** se obtiene que $F \cdot G \simeq_s A \cdot B$. Por Transitividad (**Teorema 26**), se obtiene que $H \simeq_s A \cdot B$, de donde $H \in [A \cdot B]_s$. Como $H \in w$ y $z = [A \cdot B]_s$, se concluye que $w = z$ $\square$.

DEFINICIÓN 34: Neutros en $(\mathbb{Q}, +_q, \bullet_q)$. $\boxed{0_q = [\langle 0_n, 0_n \rangle]_s \ , \ 1_q = [\langle 1_n, 0_n \rangle]_s}$

A continuación se presentan **15 " teoremas obvios " sobre** $(\mathbb{Q}, +_q, \bullet_q, <_q)$. Se espera que los demuestre por su cuenta, a partir de los Teoremas anteriores.

TEOREMA 32. Para $(\mathbb{Q}, +_q, \bullet_q, <_q)$, se cumplen las siguientes afirmaciones con $x, y, z \in \mathbb{Q}$:

32A. $x + y = y + x$

32B. $x \cdot y = y \cdot x$

32C. $(x + y) + z = x + (y + z)$

32D. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

32E. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

32F. $x + 0_q = x$

32G. $x \cdot 1_q = x$

32H. $(\forall x)(\exists y) \ : \ (x + y = 0)$

32I. Si $0_q \neq y$, entonces $(\exists z \in \mathbb{Q}) \ : \ (x = y \cdot z)$

32J. $x <_q y \implies \sim (y <_q x)$

32K. $x <_q y \ \wedge \ y <_q z \implies x <_q z$

32L. $x \neq y \implies x <_q y \ \vee \ y <_q x$

32M. $x <_q y \implies x + z <_q y + z$

32N. $x <_q y \ \wedge \ 0 <_q z \implies x \cdot z <_q y \cdot z$

32Ñ. $0_q \neq 1_q$

12.3. Ejercicios propuestos

12A. "Teoremas obvios" sobre $<_s$:

- **a.** Demostrar que $<_s$ es un orden parcial estricto en $\mathbf{Sb}$.
- **b.** Si $A, B \in \mathbf{Sb}$, demostrar que: $A <_s B \ \vee \ A \simeq_s B \ \vee \ B <_s A$.

12B. "Teoremas obvios" sobre $+_s$:

- **a.** Demostrar que $+_s$ es conmutativa.
- **b.** Demostrar que $+_s$ es asociativa.
- **c.** Si $A, B, C \in \mathbf{Sb}$, demostrar que $A \simeq_s B \iff A + C \simeq_s B + C$.
- **d.** Si $A, B, C \in \mathbf{Sb}$, demostrar que $A <_s B \iff A + C <_s B + C$.
- **e.** Definiendo $0_s \simeq_s \langle P, P \rangle$, demostrar que $A + 0_s \simeq_s A$.

12C. "Teoremas obvios" sobre $\bullet_s$:

- **a.** Demostrar que $\bullet_s$ es conmutativa.
- **b.** Demostrar que $\bullet_s$ es asociativa.
- **c.** Demostrar que $\bullet_s$ distribuye sobre $+_s$.

12D. Demostrar que $<_q$ es un orden parcial estricto en $\mathbb{Q}$.

12E. Demostrar el <u>Teorema 32H</u>: Si $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x = [\langle M, N \rangle]_s$, demostrar que $\boxed{-x = [\langle N, M \rangle]_s}$

12F. Demostrar el resto del <u>Teorema 32</u>.

12G. Si $x \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x < 0 \implies -x > 0$.

12H. Si $x \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x > 0 \implies x = [\langle P, 0 \rangle]_s \ \wedge \ P > 0$.

12I. Si $x \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x < 0 \implies x = [\langle 0, P \rangle]_s \ \wedge \ P > 0$.

12J. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x > 0 \ \wedge \ y > 0 \implies x \cdot y > 0$.

12K. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x < 0 \ \wedge \ y > 0 \implies x \cdot y < 0$.

12L. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x < 0 \ \wedge \ y < 0 \implies x \cdot y > 0$.

12M. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

12N. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

12Ñ. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $(-x) + (-y) = -(x + y)$.

12O. Si $x \in \mathbb{Q}$, demostrar que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

12P. Si $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x < z \ \wedge \ y < w \implies x + y < z + w$.

12Q. Si $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $y \geqslant 0$, demostrar que $|x| < y \iff -y < x < y$.

12R. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x = y \iff x + z = y + z$.

12S. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x = y \iff x \cdot z = y \cdot z$.